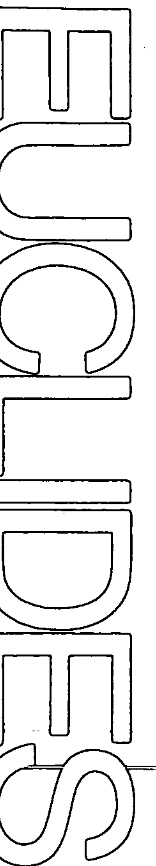


Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

58e jaargang
1982/1983
no. 6
februari

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: Drs. F. H. Dolmans (hoofdredacteur) - Dr. F. Goffree - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - P. E. de Roest (secretaris) - P. Th. Sanders - Mw. H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) - Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam. De contributie bedraagt *f* 45,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 30,–; contributie zonder Euclides *f* 25,–.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in tweevoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894 - 1 17 30. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-24 02, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 42,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 24,65. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 7,– (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 33014.

ISSN 0165-0394

Leve de hoofdredacteur

Welke lezer van dit tijdschrift kent de hoofdredacteur? Deze vraag moet je natuurlijk niet stellen aan de persoonlijke kennissen van Bert Zwaneveld. De in die kring verkregen antwoorden zullen ongetwijfeld vol lof zijn over Bert's warme vriendschap, ware collegialiteit, bescheiden opstelling en grote inzet. Nee, vraag het de anderen, die wellicht zijn naam slechts kennen van het colofon. Weten zij dat hij nu ruim 6 jaar geleden de onvergetelijke Krooshof opvolgde? Hebben zij gemerkt dat 'Euclides' een nieuwe koers ging volgen? Is het hun opgevallen dat op zijn initiatief een nieuwe invulling aan het redactiesecretariaat werd gegeven?
Waarschijnlijk niet. Gezegd mag worden dat dit voor de leden van de redactie zeker niet onopgemerkt is gebleven, evenals de hierboven vermelde persoonlijke hoedanigheden. Hoe kan het ook anders. De redactie vormt, zeker sinds de komst van Bert in 1976, een vriendenkring.
Wat had dan wel kunnen opvallen?
Ik wil de lezer wel even op gang helpen. De themanummers, die in de afgelopen jaren verschenen, kwamen tot stand door samenwerking van velen. De redactie, Bert in het bijzonder, coördineerde niet alleen, maar bereidde voor en bracht in. Bert's inbreng was, zoals in vele andere zaken, kort en bondig. En, dat moet zichtbaar zijn geworden in de laatste zes jaargangen: didactisch.
Leve de hoofdredacteur, staat boven deze pagina. Dit betekent, kort en bondig, dat Bert zijn taak als hoofdredacteur neerlegt.
U en ik zullen zijn beslissing moeten respecteren. Ik vind dat we hem dankbaar mogen uitluiden: Leve Bert!
Een nieuwe hoofdredacteur staat gelukkig al weer klaar om de zware taak op zich te nemen. Het is Frans Dolmans, als docent wiskunde en wiskundedidactiek werkzaam bij de NLO.
Hij verdient het dat we hem sterkte wensen: Leve de hoofdredacteur!

Fred Goffree

Processen uit het dagelijks leven

J. WESSELS, J. VAN NUNEN

In dit artikel zal gedemonstreerd worden hoe allerlei processen uit het dagelijks leven met eenvoudige wiskundige hulpmiddelen gemodelleerd en geanalyseerd kunnen worden. Die eenvoudige wiskundige hulpmiddelen worden gevormd door wat kansrekening en elementaire vector-matrix rekening. In feite geeft het artikel een natuurlijke manier om de eerste beginselen van de matrix-rekening te introduceren.

1 Inleiding

Alle wiskundigen zijn tijdens hun opleiding geschoold in de analyse van processen die beschreven kunnen worden met behulp van differentiaalvergelijkingen. Bij differentiaalvergelijkingen zoals

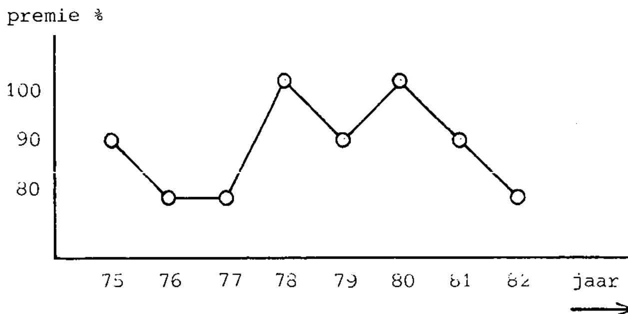
$$\frac{dx}{dt} = ax + b$$

hebben we veelal te maken met een model van een proces waarin t de tijd voorstelt, en $x(t)$ de toestand op tijdstip t. Zo kan $x(t)$ bijvoorbeeld de concentratie van een bepaalde stof als funktie van de tijd t weergeven. Zowel tijd als toestand worden op een continue-schaal gemeten. Ondanks de grote verworvenheden bij de analyse van zulke continue modellen loont het de moeite om eens te kijken naar wiskundige modellen voor processen, waarbij zowel de tijd als de toestand op een discrete schaal gemeten worden. Zulke discrete processen komen in het dagelijks leven veelvuldig voor. In dit artikel zal aan de hand van een paar eenvoudige voorbeelden een bruikbare modelvorm geconstrueerd worden en vervolgens zal getoond worden, dat die modelvorm goede mogelijkheden biedt voor een zinvolle analyse van de onderhavige processen. Zoals gezegd zijn de voorbeelden ontleend aan de praktijk. De analyse van zulke discrete processen is veelal zinvol omdat zij optreden in situaties waarin beslissingen genomen moeten worden. Aan de hand van de voorbeelden zal enigszins worden aangeduid hoe de analyses behulpzaam kunnen zijn bij het nemen van die beslissingen.

2 Voorbeelden

Om de presentatie eenvoudig te houden, worden de voorbeelden sterk gestyleerd. Voor de meeste van de voorbeelden zal het echter duidelijk zijn hoe de modellen uitgebreid moeten worden om ze praktisch relevant te doen zijn.

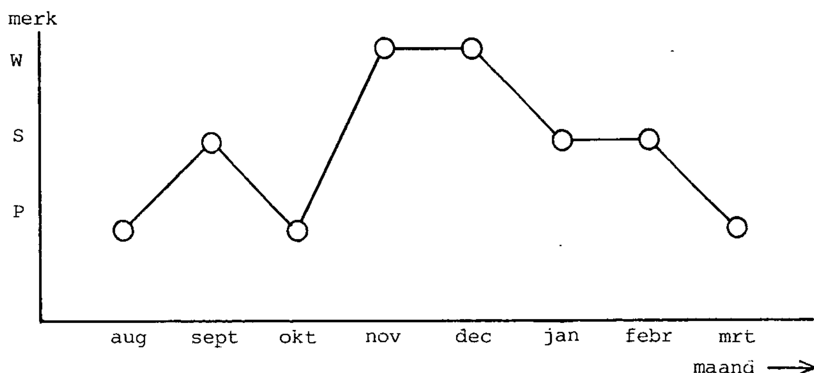
A Autoverzekering. Een bekend verschijnsel waar autobezitters mee geconfronteerd worden is de jaarlijks variërende premiehoogte in verband met no-claim kortingen. Als we nu een verzekerde beschouwen bij een maatschappij die 10% korting geeft na een jaar schadevrij rijden, en een premiekorting van 20% bij twee of meer jaar rijden zonder claim, dan kan het premieverloop over de laatste jaren er uitzien zoals in figuur 1. Zowel voor de verzekerde, als voor de verzekeringsmaatschappij is het natuurlijk interessant om voor de toekomst iets verstandigs over het te verwachten kortingspercentage te kunnen zeggen. Voor de verzekerde is het bijvoorbeeld van belang in verband met het al dan niet accepteren van een eigen risico-optie of om te bepalen boven welk bedrag hij of zij moet claimen. Voor de maatschappij is het van belang voor allerlei planningsdoeleinden, zoals het doorrekenen van veranderingen in het claimgedrag.



Figuur 1 Premieverloop tot heden bij autoverzekering

B Waspoeder. In veel huishoudens wordt regelmatig – zeg eens in de maand – een pak waspoeder gekocht. Mede door de aggressieve reclame voor dit soort produkten wordt er nogal eens van merk gewisseld. Als we voor het gemak veronderstellen, dat er maar drie merken op de markt zijn, dan geeft figuur 2 voor een bepaald huishouden het aankooppatroon van de laatste maanden weer. De drie merken heten: Witte Dwerg (W), Sunshine (S) en Palmblad (P).
Merk op, dat in dit voorbeeld op de verticale schaal geen ordening en geen afstand meer zinvol te definiëren is. Dit soort processen is natuurlijk vooral interessant voor de fabrikanten in verband met het bepalen van hun marktstrategie, maar daarop zullen we nog nader terugkomen.

C Studieverloop. Veel diploma-studies verlopen in fasen. Laten we eens een studie bekijken, die in 2 fasen verloopt (elk één jaar durend), waarbij pas na afsluiten van de eerste fase (die levert het a-diploma op) aan de tweede begonnen mag worden. Alleen aan het eind van een studiejaar kan een examen worden afgelegd. Nu kan de studiefase van een student eenvoudig gekarakteriseerd



Figuur 2 Aankoopverloop tot heden bij het kopen van waspoeder

worden:

N ≡ de student is nog bezig aan de a-fase en heeft dus nog geen enkel diploma (N = Niets),

a ≡ de student heeft het a-diploma en is bezig aan de tweede fase.

Volledigheidshalve kunnen we hier nog karakteriseringen aan toevoegen van studenten die al weg zijn.

D ≡ student is weg en heeft het diploma.

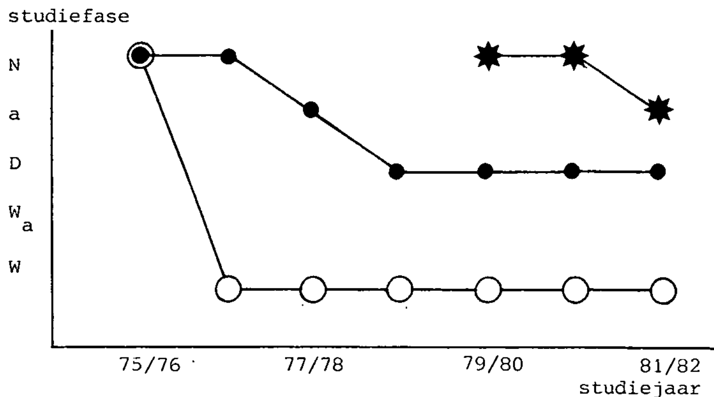
W_a ≡ student is weg en heeft alleen het a-diploma.

W ≡ student is weg en heeft geen enkel diploma.

Voor verschillende studenten is het studieverloop tot nu toe in figuur 3 weergegeven. Voor studenten die eigenlijk al weg zijn, is het uiteraard eenvoudig om het toekomstig studieverloop te voorspellen. Voorspellen van het studentengedrag is bijvoorbeeld van belang om de toekomstige behoefte aan leerkrachten, leslokalen, etc. te bepalen. Met name geldt dit als er wijzigingen optreden in het studenten-aanbod of de zwaarte van het studieprogramma verandert.
Op deze wijze zouden nog veel voorbeelden gegeven kunnen worden, we zullen volstaan met een korte aanduiding van nog enkele voorbeelden.

D Post-operatieve zorg. Voor een bepaald soort operatie-patiënten in een ziekenhuis kan onderscheid gemaakt worden in de intensiteit van de benodigde verpleegkundige verzorging na de operatie. Afhankelijk van de medische toestand wordt voor een patiënt elke dag bepaald met welke intensiteit verzorging nodig is. Bijvoorbeeld kunnen drie intensiteiten onderscheiden worden: intensieve verzorging, gewone verzorging, zelf-verzorging. Zoals in het studieverloopvoorbeeld kan ook hier een aanduiding 'weg' ingevoerd worden. Modellen van deze processen zijn bijvoorbeeld van nut bij de bepaling van de aantallen verpleegkundigen welke nodig zijn.

E Bedrijfsomvang in de bouw. Van een bouwbedrijf kan van jaar tot jaar nagegaan worden wat de bedrijfsomvang is, bijvoorbeeld op basis van de omzetgrootte. Een mogelijke indeling: zeer groot, groot, middelgroot, klein, zeer klein en gestopt (opgeheven of opgeslokt). Bij de analyse van het toekomstige gedrag van de bedrijfstak kunnen zulke modellen bruikbaar zijn.

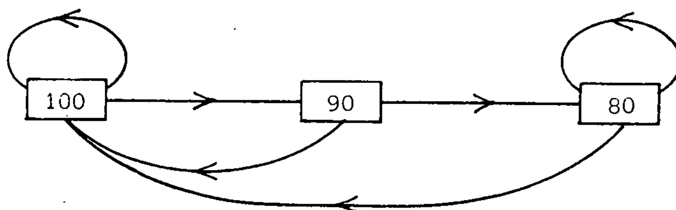


Figuur 3 Studieverloop voor drie verschillende studenten

3 Toestanden en overgangen

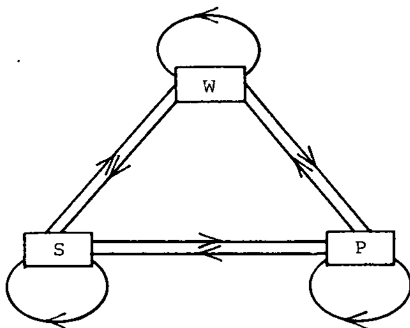
Een eerste stap in de modellering van de processen is in de voorbeelden eigenlijk al gemaakt, dat is namelijk het aangeven van de toestanden waarin het proces kan verkeren. De voor de hand liggende tweede stap is het aangeven van de overgangsmogelijkheden. Dit kan eenvoudig gebeuren in een netwerk of graaf. In feite geeft zo'n plaatje al meteen veel inzicht in de structuur van het proces.

A Autoverzekering. De regeling van no-claim korting is zodanig, dat iemand die in een jaar schade claimt het volgende jaar de volle premie moet betalen (toestand 100). Met andere woorden, iemand die nu een korting geniet van nul, 10 of 20 % zal na een claim een 'overgang' maken naar toestand 100. Voorts krijgt iemand die in een jaar geen schade claimt het volgende jaar 10 % extra premiekorting (met een maximum van 20 %), zodat bij geen claim, vanuit toestand 100 een overgang plaatsvindt naar toestand 90, vanuit 90 naar 80 en vanuit toestand 80 naar toestand 80. Dit leidt tot het netwerk van overgangsmogelijkheden uit figuur 4.



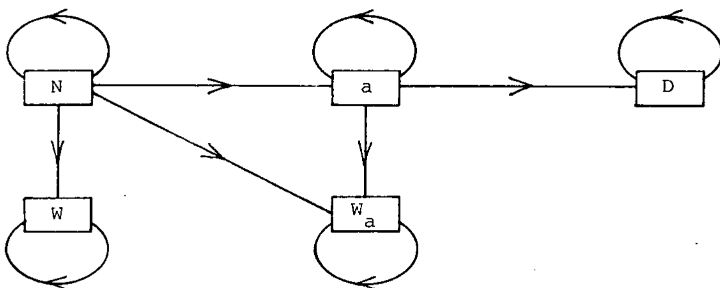
Figuur 4 Diagram van overgangsmogelijkheden voor premiehoogte autoverzekering

B Waspoeder. Een consument kan van elk merk op elk ander merk overstappen, maar ook bij het oude merk blijven, zodat het diagram meer overgangsmogelijkheden heeft dan bij het autoverzekeringsprobleem. Vergelijk figuur 5.



Figuur 5 Diagram van overgangsmogelijkheden voor aankoop van een merk waspoeder

C Studieverloop. Als we aannemen, dat als men eenmaal een diploma heeft dit nooit meer afgenomen kan worden en dat studenten die weggegaan zijn nooit meer terugkomen (mochten ze terugkomen, dan worden ze als nieuw beschouwd), dan geeft het diagram het studieverloop weer. Ook het eenrichtingsverkeer komt duidelijk tot uitdrukking (figuur 6).



Figuur 6 Diagram van overgangsmogelijkheden bij studieverloop

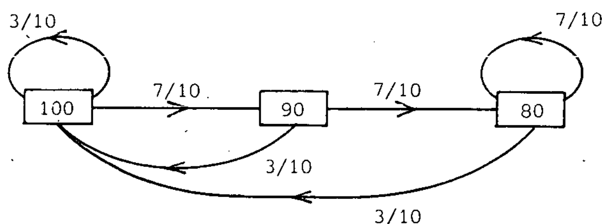
4 Voortgangsmechanisme

De eenvoudige netwerken uit de vorige paragraaf geven aan langs welke paden het betreffende proces zou kunnen verlopen. Maar hoe kan nu de padkeuze het best gemodelleerd worden? Uit de voorbeelden zal duidelijk zijn, dat een deterministisch of mechanisch model voor de voortgang van het proces weinig zin heeft, want veelal zijn er verschillende overgangsmogelijkheden reëel. Wel zal vaak de ene overgangsmogelijkheid waarschijnlijker zijn dan de ander. Laten we bijvoorbeeld eens kijken naar de statistische gegevens van het claimgedrag die de verzekeringsmaatschappij 'Simplesure BV' heeft verzameld (Tabel 1). Uit deze tabel lezen we af, dat in de laatste jaren door de bank genomen jaarlijks een fraktie van 30 % van de verzekerden claimde, namelijk $\frac{195.000}{650.000} = 0,30$.

jaar	aantal verzekerden	aantal dat claimde
77	123.400	37.600
78	127.500	38.000
79	129.700	38.000
80	132.600	40.300
81	136.800	40.500
Totaal	650.000	195.000

Tabel 1 Statistiek van claims bij 'Simplesure BV'

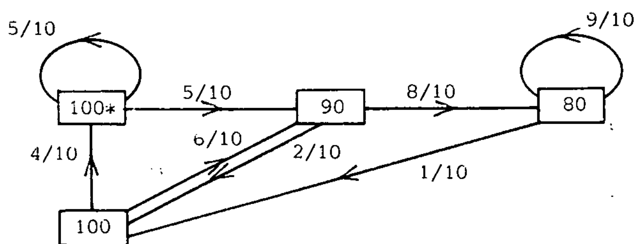
Een eerste model, dat we dus zouden kunnen maken om de voortgang van het proces te beschrijven, zou bestaan uit het geven van een kans van 0,3 aan de claimmogelijkheid en dus een kans van 0,7 aan de mogelijkheid om niet te claimen. We zouden dat in het diagram van overgangsmogelijkheden kunnen aangeven door deze kansen bij de passende overgangen te noteren (figuur 7). Het voortgangsmodel zou dan worden, dat in toestand 100 % geloot wordt tussen de mogelijkheid om daar te blijven en de mogelijkheid om naar premie-niveau (toestand) 90 % te gaan en wel met kansen van respectievelijk 0,3 en 0,7.



Figuur 7 Overgangsdiagram met overgangskansen voor premiehoogte autoverzekering bij claim kans 0,3

Zo is dus een volledig model verkregen voor het procesgedrag door als overgangsmechanisme een kansmechanisme te kiezen, dat voor elke uitgangspositie een loting uitvoert uit de twee mogelijkheden voor de keuze van de volgende overgang. Door de ruwheid van de gegevens in tabel 1, hebben alle uitgangsposities dezelfde no-claim kans 7/10 gekregen. In de praktijk is er misschien reden om wat meer onderscheid te maken. Dat kan natuurlijk door de no-claim kans per uitgangspositie te variëren. Hoe zinvol dat is kan uit wat meer gedetailleerde claimstatistieken blijken.
In feite weten we van de verzekerde op premie-niveau 80 % dat hij de vorige 2 jaar schadevrij gereden heeft en van de klant op 90 % dat hij vorig jaar niet, en het jaar dàarvoor wél claimde. Alleen van de 100 % weten we slechts dat hij vorig jaar heeft geclaimd. Een kleine uitbreiding van het diagram maakt het mogelijk om de no-claim kans te kiezen op basis van het claimgedrag van de laatste 2 jaar. Namelijk door een extra toestand 100* in te voeren voor klanten die ook vorig

jaar al op het 100%-niveau zaten. In figuur 8 is dit aangegeven, met een meer gedifferentieerde keuze van no-claim kansen welke op basis van statistische gegevens slechts afhankelijk bleken te zijn van de claimhistorie van de laatste 2 jaar.



Figuur 8 Overgangsdiagram met overgangskansen voor premiehoogte autoverzekering bij basering no-claim kans op claimgedrag van de vorige 2 jaar

Voor de andere voorbeelden kan uiteraard op soortgelijke wijze een voortgangsmechanisme bedacht worden, indien dit voor de juiste beschrijving van het praktische probleem nodig is. Als illustratie bekijken we nog het waspoedervoorbeeld. Uit een geschikt marktonderzoek kunnen gegevens verkregen worden over merkwisselingsgedrag van consumenten, bijvoorbeeld door een steekproef van consumenten te vragen naar het gekochte merk in de laatste 2 maanden. Tabel 2 zou enige resultaten van zo'n steekproef kunnen samenvatten. In de rij aangegeven met W, staan de aantallen consumenten in de steekproef die de eerste maand Witte Dwerg kochten (totaal 20) en in de tweede maand resp. W, S, P. Uit deze tabel blijkt dat Witte Dwerg, dat pas op de markt is, nog niet sterk vertegenwoordigd is, maar de veroverde klanten goed kan vasthouden. Door geur, kleur en textuur van het wasmiddel denken de klanten bijvoorbeeld dat het beter wast.

1 \ 2	W	S	P	Totalen mnd. 1
W	15	3	2	20
S	10	25	15	50
P	5	15	30	50
Totalen mnd. 2	30	43	47	120

Tabel 2 Koopgedrag waspoeder door steekproef van 120 consumenten in 2 opeenvolgende maanden

Om een beter beeld te krijgen van de merkovergangslust van de consumenten, kunnen we beter kijken naar de percentages klanten van W in de eerste maand die in W blijven resp. overgaan naar S en P. Dit is gedaan in tabel 3.

1 \ 2	W	S	P	Totaal
W	75	15	10	100%
S	20	50	30	100%
P	10	30	60	100%

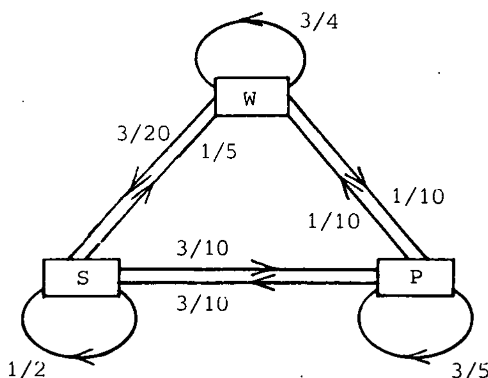
Tabel 3 Overgangspercentages bij waspoederaankoop in 2-maands steekproef bij 120 consumenten

Uit deze tabel blijkt duidelijker, dat Witte Dwerg het best is in het vasthouden van klanten en Sunshine het slechtst (75% resp. 50% klantentrouw). Daarentegen is Sunshine beter in het aantrekken van nieuwe klanten dan Witte Dwerg (zie bijvoorbeeld de 30% en 10% op de onderste rij). Dit cijfermateriaal toont, dat de aggressieve reclame van Sunshine beter werft, en dat de prettige eigenschappen van Witte Dwerg de klanten beter vasthoudt. Palmblad zit qua eigenschappen tussen deze twee uitersten in. De vraag is natuurlijk, wat de effekten zullen zijn op de marktverdeling, maar zover zijn we nog niet.

Een model voor het voortgangsgedrag kan natuurlijk zo uit tabel 3 afgelezen worden: geef een klant in toestand W een kans

75/100 = 3/4 om bij W te blijven,
15/100 = 3/20 om naar S te gaan,
en 10/100 = 1/10 om naar P te gaan.

Door voor de andere uitgangsposities analoog te werk te gaan, wordt het model uit figuur 9 verkregen.



Figuur 9 Overgangsdiagram met overgangskansen voor aankoopgedrag wasppoeder

Ook hier zou een uitbreiding van het model wel eens zinvol kunnen zijn. Bijvoorbeeld omdat van de consumenten die een paar keer achter elkaar een bepaald merk gekocht hebben, een extra grote fraktie dit volgende maand weer zal doen, met andere woorden, een extra grote kans hebben om bij dat merk te

blijven. Zo'n verfijning zou gerealiseerd kunnen worden door het toevoegen van toestanden WW, SS en PP voor klanten die al 2 of meer keer na elkaar het betreffende merk hebben gekocht. Het diagram moet dan, uiteraard, ook aangepast worden.

5 Matrix-representatie

Alle gegevens over het voortgangsmechanisme staan in de overgangsdiagrammen met overgangskansen, zoals figuur 7, 8 en 9. Deze informatie kan ook in tableau-vorm gegeven worden.
Voor het waspoedervoorbeeld krijgen we dan:

	W	S	P
W	3/4	3/20	1/10
S	1/5	1/2	3/10
P	1/10	3/10	3/5

waarin een rij aangeeft met welke kansverdeling bij het betreffende uitgangsmerk naar de verschillende alternatieven gesprongen zal worden.

Voor de autoverzekering in de eenvoudigste vorm kan het voortgangsmechanisme gerepresenteerd worden door:

	100	90	80
100	3/10	7/10	0
90	3/10	0	7/10
80	3/10	0	7/10

Merk op, dat inderdaad ook met behulp van dit tableau het diagram geconstrueerd kan worden.

Voor de wiskundige analyse hebben de namen van de toestanden uiteraard geen betekenis, die kunnen we dus net zo goed weglaten als we maar afspreken, dat we horizontaal en verticaal dezelfde volgorde voor de toestanden kiezen. Zo krijgen we voor het voortgangsmechanisme van het uitgebreide autoverzekeringsvoorbeeld:

1/2	0	1/2	0
2/5	0	3/5	0
0	1/5	0	4/5
0	1/5	0	4/5

We noemen zo'n tableau de matrix van overgangswaarschijnlijkheden of overgangskansen.

6 Kansen berekenen

Om deze modellen te kunnen gebruiken voor de ondersteuning van beslissingen zal het nodig zijn om op basis van het model voorspellingen voor de toekomst te maken. Daarvoor zullen we in staat moeten zijn kansen voor toekomstig gedrag te berekenen. Laten we eens de kans berekenen dat iemand die deze maand Witte Dwerg koopt in de komende 3 maanden achtereenvolgens Sunshine, Palmblad, Witte Dwerg zal kopen. Welnu, de kans om over te gaan naar Sunshine is 3/20 en de kans om van daaruit op Palmblad over te springen is 3/10 en de kans om van Palmblad over te gaan op Witte Dwerg is 1/10. Dus de kans op het pad S-P-W uitgaande van W is: $3/20 \cdot 3/10 \cdot 1/10$. We noteren dit als volgt:

	$P_w(SPW)$	$= 3/20 \cdot 3/10 \cdot 1/10 = 9/2000$
Analoog:	$P_w(SSW)$	$= 3/20 \cdot 1/2 \cdot 1/5 = 3/200$
	$P_w(PPW)$	$= 1/10 \cdot 3/5 \cdot 1/10 = 3/500$
	$P_w(PSW)$	$= 1/10 \cdot 3/10 \cdot 1/5 = 3/500$
	$P_w(WWW)$	$= 3/4 \cdot 3/4 \cdot 3/4 = 27/64$
	$P_w(WSW)$	$= 3/4 \cdot 3/20 \cdot 1/5 = 9/400$
	$P_w(WPW)$	$= 3/4 \cdot 1/10 \cdot 1/10 = 3/400$
	$P_w(PWW)$	$= 1/10 \cdot 1/10 \cdot 3/4 = 3/400$
	$P_w(SWW)$	$= 3/20 \cdot 1/5 \cdot 3/4 = 9/400$

Zo zijn de kansen berekend voor alle mogelijke paden die uitgaande van W na de komende 3 maanden weer uitkomen in W. Door deze 9 kansen bij elkaar op te tellen, krijgen we de kans dat een consument, uitgaande van Witte Dwerg, over 3 maanden weer of nog Witte Dwerg koopt, deze kans is:

$$P_w(..W) \simeq 1/2$$

Op deze wijze kunnen we ook $P_w(..S)$ en $P_w(..P)$ uitrekenen, en dan hebben we de kansverdeling voor het merk dat een consument die nu W koopt over 3 maanden zal kopen. Ook de kansverdeling voor over 4, 5 en 6 maanden zou zo kunnen worden uitgerekend. Met het model kan dus gerekend worden, maar het gaat niet erg handig. We doen tot nu toe of we niets afweten van matrix-manipulatie, maar het is natuurlijk toch wel nuttig om te constateren dat uit deze wijze van berekenen blijkt, dat $P_w(..W)$ de WW-component is van de derde macht van de overgangsmatrix.

7 Kansen berekenen via recursie

Een handiger manier om $P_w(..W)$ te berekenen maakt gebruik van de kansverdeling over de merken 2 maanden na de huidige:

$$P_w(..W) = P_w(.W) \cdot 3/4 + P_w(.S) \cdot 1/5 + P_w(.P) \cdot 1/10 \qquad (7.1)$$

Namelijk na 3 maanden kan de aankoop W optreden, nadat in de voorafgaande maand resp. W, S of P gekocht is.
Voor $P_w(..S)$ en $P_w(..P)$ wordt analoog verkregen:

$$P_w(..S) = P_w(.W) \cdot 3/20 + P_w(.S) \cdot 1/2 + P_w(.P) \cdot 3/10 \qquad (7.2)$$
$$P_w(..P) = P_w(.W) \cdot 1/10 + P_w(.S) \cdot 3/10 + P_w(.P) \cdot 3/5 \qquad (7.3)$$

Dus de kansverdeling na 3 maanden kan verkregen worden uit de kansverdeling na 2 maanden en de eenstaps overgangskansen.
In kortschrift kunnen we de procedure noteren als we vector-matrix notatie invoeren.
Noteer de kansverdeling van de aankoop na n maanden (bij start in W) als rij-vector:

$$p_n = [P_w(....W), P_w(....S), P_w(....P)]$$

Dan zijn de formules (7.1), (7.2), (7.3) te schrijven als

$$p_3 = p_2 \begin{bmatrix} 3/4 & 3/20 & 1/10 \\ 1/5 & 1/2 & 3/10 \\ 1/10 & 3/10 & 3/5 \end{bmatrix}$$

Als we de matrix noteren met A, dan wordt dit

$$p_3 = p_2 A$$

en A is precies het tableau van overgangskansen uit paragraaf 5.
Het heeft aantrekkelijke kanten om op deze manier matrix-vector vermenigvuldiging te definiëren als kortschrift voor een ingewikkelde rekenregel. De regel geldt natuurlijk algemener:

$$p_n = p_{n-1} A$$

zodat

$$p_n = p_0 A^n \qquad \text{met } p_0 = (1, 0, 0)$$

waar deze rekenwijze ook meteen een natuurlijke definitie voor machten van matrices oplevert.
Aardig is nog om te vermelden, dat de componenten van A^n ook een duidelijke interpretatie hebben, namelijk:

$$p_n(S) = (A^n)_{ws},$$

dus de WS-component van A^n is juist de kans (bij start in W) om over n maanden in S te zijn aangeland. A^n bevat dus n-staps overgangskansen.

Behalve een recursieve rekenregel levert deze exercitie het inzicht, dat de kansverdeling van de toestand van het systeem op tijdstip n volledig bepaald

wordt door p_0, de startkansverdeling, en A^n, de n-de macht van de matrix van overgangskansen.

8 Asymptotisch gedrag

Het is nu natuurlijk erg aantrekkelijk om het gedrag van A^n als funktie van n te gaan analyseren. We zullen echter de verleiding weerstaan en ons bepalen tot de situatie met twee toestanden. Daartoe vereenvoudigen we het waspoedervoorbeeld tot een markt met slechts 2 merken: Witte Dwerg en Sunshine. Als matrix van overgangskansen kiezen we:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}$$

Ook nu weer is Witte Dwerg het merk met de grotere merktrouw. Eenvoudig kan bij dit voorbeeld voor enige waarden van n de matrix A^n berekend worden (afgerond op 2 decimalen):

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0{,}84 & 0{,}16 \\ 0{,}48 & 0{,}52 \end{bmatrix} \qquad A^4 = \begin{bmatrix} 0{,}78 & 0{,}22 \\ 0{,}65 & 0{,}35 \end{bmatrix}$$

$$A^8 = \begin{bmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{bmatrix} \qquad A^{16} = \begin{bmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 \\ 0{,}75 & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

Vanwege:

$$p_n = p_0 A^n$$

geeft de 1e rij van A^n de kansverdeling voor de aankoop in maand n van iemand die bij W begint, terwijl de 2e rij de overeenkomstige kansverdeling geeft voor iemand die met S start. Kennelijk convergeren die kansverdelingen met klimmende n en voor de beide startpunten treedt dezelfde limietverdeling op, te weten (0,75 0,25).
We veronderstellen even, dat er een limietverdeling optreedt, dus dat de rij p_n convergeert voor $n \to \infty$. Stel:

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p$$

dan geldt vanwege

$$p_n = p_{n-1} A \tag{8.1}$$

ook dat

$$p = pA \tag{8.2}$$

Oftewel de limietverdeling p is eigen-vector bij de eigenwaarde 1 van de matrix A. En inderdaad is het eenvoudig na te gaan, dat (0,75 0,25) de enige rij-eigen-

vector (met rijsom 1) van A is bij de eigenwaarde 1. Dit levert een veel eenvoudiger manier om een limietverdeling te bepalen dan door het itereren van (8.1) of het machtsverheffen bij A.
Strikt genomen is nog steeds niet bewezen, dat p inderdaad limietverdeling is. Het is aardig om voor dat probleem even naar het algemene 2-toestanden geval te kijken:

$$A = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

waarin α en β dus de merkontrouw voor de beide merken aangeven.
Ook voor deze keuze van A heeft (8.2) precies 1 kansverdeling als oplossing, nl.:

$$\left[\frac{\beta}{\beta+\alpha}, \frac{\alpha}{\beta+\alpha}\right]$$

Tenminste als niet geldt: $\alpha = \beta = 0$.
Hieruit volgt, dat de evenwichtsverdeling (als die tenminste bestaat, want dat moet nog steeds bewezen worden) volledig bepaald wordt door de verhouding van α en β: de merkontrouwfactoren. De onderstaande modellen hebben dus allemaal dezelfde evenwichtsverdeling, ook al zijn soms de merktrouwfactoren voor beide merken bijna gelijk:

$$\begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0{,}999 & 0{,}001 \\ 0{,}003 & 0{,}997 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0{,}9997 & 0{,}0003 \\ 0{,}0009 & 0{,}9991 \end{bmatrix}$$

Het verschil tussen deze modellen zal natuurlijk vooral zitten in de snelheid waarmee de limietverdeling bereikt wordt.
Aangezien $1 - \alpha - \beta$ ook eigenwaarde van A is met rij-eigen-vector $(1, -1)$, kan A geschreven worden als

$$A = S^{-1} \Lambda S \tag{8.3}$$

$$met \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Hieruit volgt

$$A^n = S^{-1} \Lambda^n S \tag{8.4}$$

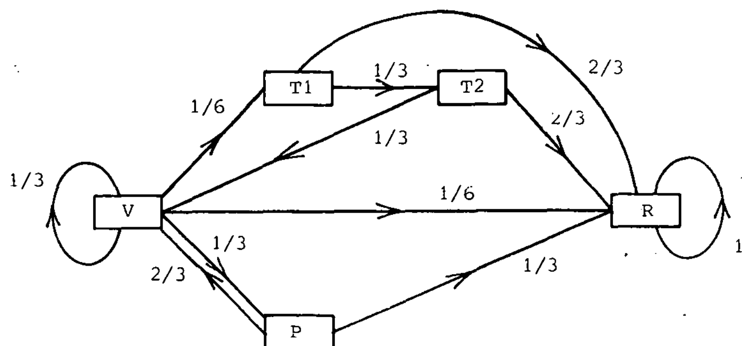
$$A^n = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \frac{(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta} \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{bmatrix}$$

Hiermee is inderdaad de convergentie van A^n bewezen. De gevallen $\alpha = \beta = 0$ en $\alpha = \beta = 1$ moeten even apart behandeld worden. Voor $\alpha = \beta = 0$ zijn er net zoveel limietverdelingen als er beginverdelingen zijn. Voor $\alpha = \beta = 1$ ontstaat

een alternerende rij. Bovendien is het belang van de tweede eigenwaarde $1 - \alpha - \beta$ voor de convergentiesnelheid hiermede aangetoond.
Voor hogere aantallen toestanden is dit niet de weg, omdat dan het expliciet aangeven van eigenwaarden en eigenvectoren lastig wordt, echter ook dan blijft de vorm (8.3) van belang om te laten zien dat volgens (8.4) eigenvectoren bij de eigenwaarde 1 voor eventuele limietverdelingen zorgen, terwijl de absolute waarde van de op één na grootste eigenwaarde de convergentiesnelheid bepaalt.

9 Kosten en opbrengsten

Het soort modellen waar het hier over gaat, wordt vaak niet geanalyseerd omdat men zo in kansverdelingen geïnteresseerd is, maar vooral omdat aan het doorlopen van het proces kosten of opbrengsten zijn verbonden en men graag zou willen weten wat men te verwachten heeft op dat punt. Om hier iets van te laten zien, wordt nu een model gemaakt van de opleiding voor het rij-examen.
Het volledig rij-examen bestaat uit een praktisch en een theoretisch gedeelte. Kandidaten die voor één van beide gedeelten afgewezen worden, mogen de volgende keer volstaan met het overdoen van dát gedeelte. Echter, bij het praktische gedeelte geldt, dat bij een herhaalde afwijzing toch weer het volledig examen moet worden afgelegd. Het theoretische gedeelte mag echter 2 keer worden overgedaan. We kunnen het proces van de achtereenvolgende examens nu modelleren. Merk op, dat de tijd nu geen 'echte' tijd is, maar gewoon een tellertje dat aangeeft hoe vaak al examen gedaan is. Figuur 10 geeft een mogelijk transitiediagram met overgangskansen weer. Hierin betekent:
V : volledig examen
P : praktisch gedeelte
T_1 : theoretisch gedeelte (eerste herkansing)
T_2 : theoretisch gedeelte (tweede herkansing)
R : rijbewijs behaald.



Figuur 10 Transitiediagram met overgangskansen voor het rij-examen

Aan het doen van examen zijn nogal wat kosten verbonden, vooral in verband met het praktische gedeelte (een aantal lessen tussen aanvraag en examen, enz.).

Laten we voor het gemak de volgende kosten veronderstellen:

volledig examen	fl. 690,–
praktisch gedeelte	fl. 640,–
theoretisch gedeelte	fl. 75,–

Als illustratie van de mogelijkheid om aan de kosten te rekenen, zullen we eens kijken wat iemand die een volledig examen aanvraagt, als verwachte kosten heeft. Noem deze kosten K_V. Hoe groot is dan K_V? Wel, K_V is dan gelijk aan fl. 690,– voor de eerste ronde, plus nog wat voor de volgende rondes als hij of zij niet direct slaagt. Met kans 1/3 start de volgende ronde weer in V, met kans 1/6 in T_1 en met kans 1/3 in P, dus:

$$K_V = 690 + 1/3K_V + 1/6K_{T_1} + 1/3K_P \qquad (9.1)$$

Hierin zijn K_{T_1} en K_P natuurlijk gelijk aan de verwachte kosten bij start in T_1 resp. P. Maar K_{T_1} en K_P zijn niet bekend, dus stellen we soortgelijke vergelijkingen voor deze grootheden op als (9.1) waarin K_{T_1} en K_P de verwachte kosten zijn bij een start in T_1 resp. P.

$$K_{T_1} = 75 + 1/3K_{T_2} \qquad (9.2)$$
$$K_{T_2} = 75 + 1/3K_V \qquad (9.3)$$
$$K_P = 640 + 2/3K_V \qquad (9.4)$$

Bovenstaand stelsel is eenduidig oplosbaar: K_V = fl. 2160,–. Als we dan van deze K's een kolomvector maken, dan wordt (9.1) – (9.4) in matrixvorm:

$$K = c + QK$$

$$\text{met} \quad c = \begin{bmatrix} 690 \\ 75 \\ 75 \\ 640 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Merk op, dat Q het gedeelte van de matrix van overgangskansen is, dat overblijft als de absorberende toestand R weggelaten wordt. We zullen hier niet verder op ingaan, maar het zal de lezer niet ontgaan zijn, dat er een soort dualiteit ontstaat tussen kansen (rijen) en kosten (kolommen). Bovendien zal duidelijk zijn, dat op eenvoudige wijze interessante grootheden afgeleid kunnen worden. Zo kan bijvoorbeeld op soortgelijke manier bepaald worden hoe lang men gemiddeld nodig heeft om het rij-examen te behalen. Ook kan men gevolgen van wijzigingen in de kostenstructuur analyseren.

10 Cohorten

Tot slot zullen we nog één uitbreiding kort aanstippen. Veelal is men niet echt geïnteresseerd in het gedrag van één persoon. De waspoederfabrikanten zijn geïnteresseerd in hun marktaandeel. Om dit aspect te bekijken, grijpen we terug op het voorbeeld over het studieverloop.

Stel dat deze cursus 300 studenten in fase N zitten en 200 studenten in fase a. Men wil met ingang van de volgende cursus een groter aantal studenten laten aanvangen dan voorheen en wel 250 per jaar en men vraagt zich af wat voor effect dat zal hebben op de bezetting in de komende jaren en ook op het aantal afstuderenden. Men is dus niet geïnteresseerd in de vraag wie er precies over 3

jaar een b-diploma zal hebben, men is louter geïnteresseerd in aantallen. Er wordt wel gezegd: men is geïnteresseerd in het cohorte gedrag.
Noem $M_n(i)$ het verwachte aantal studenten in fase i gedurende cursusjaar n (voor het huidige cursusjaar geldt: $n = 0$).
De rijvector M_n met

$$M_n = [M_n(\mathrm{N}), M_n(\mathrm{a}), M_n(\mathrm{W}), M_n(\mathrm{W_a}), M_n(\mathrm{D})]$$

geeft de verwachte bezetting in cursusjaar n weer.
Volledig analoog aan het ontwikkelde in paragraaf 7 voor de kansverdeling kunnen we laten zien, dat de verwachte bezetting in cursusjaar n ontstaat uit die in cursusjaar $n - 1$ door de vector M_{n-1} met de matrix van overgangskansen te vermenigvuldigen. Alleen zijn we dan nog de recrutering van nieuwe studenten vergeten, maar die kan weergegeven worden door de vector

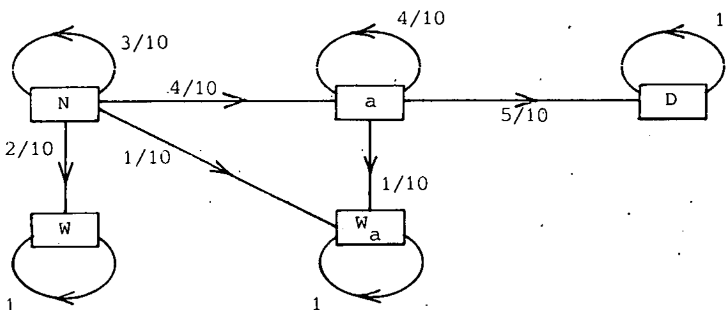
$$R = (250, 0, 0, 0, 0).$$

Als totaal resultaat vinden we

$$M_n = R + M_{n-1} A, \qquad (10.1)$$

waarin A de matrix van overgangskansen is. Kiezen we A op basis van figuur 11, dan krijgen we de voorspelde aantallen uit tabel 4 door iteratie van (10.1) met

$$M_0 = (300, 200, 0, 0, 0)$$



Figuur 11 Transitiediagram met overgangskansen voor het studieverloop

verwachte aantallen			
jaar	in fase N	in fase a	nieuwe afgestudeerden
81/82	300	200	100
82/83	340	200	100
83/84	352	216	108
84/85	356	227	114
85/86	357	233	117
86/87	357	236	118
87/88	357	237	118

Tabel 4 Voorspellingen voor studentenaantallen

Met eenvoudige matrix-operaties kunnen zo dus interessante voorspellingen gedaan worden voor processen uit het dagelijks leven. Zo zijn verschillende door het C.B.S. gebruikte demografische modellen, bijvoorbeeld voor voorspelling van de toekomstige leeftijdsverdeling van de bevolking, op cohorte modellen gebaseerd.

11 Slotopmerkingen

Heel in het kort is in het voorgaande aangegeven hoe allerlei processen met behulp van eenvoudig wiskundig gereedschap gemodelleerd en geanalyseerd kunnen worden. Met name de beginselen van de matrixrekening en ook de matrixnotatie komen daarbij op een natuurlijke manier te voorschijn. Matrices, vectoren, matrixvermenigvuldiging, eigenwaarde en eigen-vector kunnen aan de hand van deze of soortgelijke voorbeelden ingevoerd worden als eenvoudige rekenkundige notaties, zonder veel beroep op meetkundige achtergronden. In de literatuur is zo'n benadering nauwelijks te vinden. In een aantal inleidende operations research boeken vinden we veelal slechts een hoofdstuk dat gewijd is aan Markov ketens, zie [1], [2], [3]. Maar bij de beschrijving wordt dan uitgegaan van bekendheid met de beginselen der matrixrekening.
De onderwerpen die beschreven zijn in de paragrafen 9 en 10 geven een, zij het summiere, indruk van praktische modeluitbreidingen.
Tot slot van dit artikel zouden wij nog een laatste uitbreiding willen noemen, namelijk de uitbreiding waarbij, in de processen, de kansverdeling voor de overgangen van de ene toestand naar de andere beïnvloed kan worden door beslissingen. Zulke processen kunnen beschreven worden met behulp van Markov beslissingsmodellen, zie [3].

Referenties

[1] Anderson, D. R., Sweeney, D. J., Williams, T. A., *An Introduction to Management Science, Quantitative approaches to decision making*, West Publishing Company, New York, 1980.
[2] Philips, D. T., Ravindran, A., Solberg, J. J., *Operations Research Principles and Practice*, Wiley & Sons, New York, 1976.
[3] Wagner, H. M., *Principles of Operations Research, with applications to managerial decisions*, Prentice/Hall, 1975.

Over de auteurs:

Prof. Dr. J. Wessels is hoogleraar in de wiskunde aan de Technische Hogeschool Eindhoven.
Dr. Ir. J. van Nunen is wetenschappelijk hoofdmedewerker voor operations research aan de Interuniversitaire Interfaculteit Bedrijfskunde te Delft.
Beide auteurs houden zich vooral bezig met de toepassing van de kansrekening in plannings- en managementproblemen.

Huiswerk voor wiskunde (2)

H. J. SMID, A. VERWEIJ

'Wiskunde is geen vak om uit je hoofd te leren. Je moet het begrijpen en daar heb je hulp bij nodig. Want als je thuis in je eentje zit te leren en je snapt het niet, dan kom je niet verder.'

uitspraak van een lbo-leerlinge,
de Volkskrant, 13 mei 1982.

In ons vorige artikel zijn we ingegaan op de opvattingen over huiswerk zoals veel leraren, leerlingen en ouders die hebben. Hoewel het voor de meeste betrokkenen een tamelijk vanzelfsprekende zaak is dat alle huiswerk nut heeft, geven de resultaten van experimenten waarmee men het effect van huiswerk heeft willen onderzoeken voldoende aanleiding om wat genuanceerder over dit nut te denken. In dit artikel zullen we deze resultaten bespreken, onder *c* voor wat betreft 'gewoon' huiswerk en onder *d* voor wat betreft 'alternatieve' vormen van huiswerk voor wiskunde.

Met het stellen van de vraag naar het werkelijke effect van huiswerk dringt zich direct een andere vraag op: in hoeverre is zoiets ooit te meten? Allerlei mogelijke effecten, zoals het vormen van een goede studiehouding en het zelfstandig leren werken, lijken niet of nauwelijks objectief meetbaar te zijn. In bijna alle ons bekende onderzoeken naar het effect van huiswerk heeft men zich dan ook beperkt tot het aspect van huiswerk dat wat dit betreft wèl goed hanteerbaar is: de eventuele verbetering van de prestaties op school, voor zover deze tot uiting komen in toetsresultaten of proefwerkcijfers. Soms heeft men daarnaast ook de invloed van huiswerk op de attitude ten opzichte van het betreffende vak onderzocht, voor zover die naar voren komt uit antwoorden van leerlingen op vragen hierover.

c Het effect van de 'gebruikelijke' huiswerkpraktijk

De onderzoeken naar het effect van het 'gebruikelijke' huiswerk waren meestal als volgt opgezet: er werd een aantal, zoveel mogelijk vergelijkbare, groepen gevormd; aan een of meerdere van deze groepen, de zogenaamde proefgroepen, werd gedurende een aantal weken of maanden voor een vak géén huiswerk

opgegeven; de andere groepen, de controlegroepen, kregen wèl huiswerk voor dat vak: het gebruikelijke huiswerk, op de gewone manier opgegeven en besproken. Na afloop van het experiment werd dan nagegaan of tussen proefgroepen en controlegroepen significante verschillen in prestaties, attitude (of beide) ten aanzien van het desbetreffende vak waren ontstaan. Een aantal onderzoekers heeft zelf al gewezen op de ernstige beperkingen waaraan dit soort onderzoeken onderhevig is. De voornaamste zijn: mogelijke invloeden van andere vakken, waarvoor controle- èn proefgroepen huiswerk krijgen, en de relatief korte duur van deze experimenten, waardoor lange-termijn effecten van huiswerk niet of moeilijk vastgesteld kunnen worden.

In Amerika werd al vóór de Tweede Wereldoorlog op deze wijze onderzoek gedaan naar de effectiviteit van huiswerk. Uit deze onderzoeken kwamen weinig aanwijzingen voor positieve effecten van huiswerk voor wiskunde naar voren. Later is de opzet van deze onderzoeken nogal aangevochten, omdat men toch niet zuiver de tegenstelling wèl huiswerk (in de gewone vorm) – géén huiswerk gecreëerd bleek te hebben, maar verschillende vormen van huiswerk, waaronder bijvoorbeeld 'supervised study', in het onderzoek betrokken had. Inmiddels is er echter in Amerika een aantal studies verricht waarbij wel een zuivere tegenstelling wèl gewoon huiswerk – géén huiswerk voor wiskunde tussen controle- en proefgroepen is aangebracht. Uiterst interessant is nu, dat in verreweg de meeste gevallen toch weer géén significante verschillen in schoolprestaties tussen de controlegroepen en de proefgroepen vastgesteld werden. Het wel of niet opgeven van huiswerk bleek evenmin gevolgen te hebben voor de attitude van de leerlingen ten opzichte van wiskunde.

Deze opmerkelijke resultaten zijn voor wat betreft de invloed van huiswerk op de schoolprestaties bevestigd door enkele experimentele onderzoeken, die omstreeks de zestiger jaren in West-Duitsland gehouden zijn. Hierbij was – naast andere vakken – ook wiskunde betrokken. Er bleken géén significante verschillen in prestaties bij proefwerken en toetsen op te treden tussen proef- en controlegroepen. Vooral de resultaten van het vrij omvangrijke onderzoek van B. Wittmann met betrekking tot huiswerk voor rekenen en spellen hebben heel wat stof doen opwaaien. Er is zelfs korte tijd actie gevoerd: 'Schluss mit den Hausaufgaben', overigens zonder het door de actievoerders gewenste gevolg. Uit de onderzoeksresultaten mag immers niet zomaar de conclusie getrokken worden dat huiswerk in welke vorm dan ook zinloos is. Het is heel goed denkbaar dat andere vormen van huiswerk dan de vormen, waarop deze onderzoeken betrekking hebben, wèl effect hebben. In deel *d* van dit artikel gaan we in op onderzoek dat inmiddels naar de invloed van zulke andere vormen van huiswerk op schoolprestaties en/of attitude gedaan is.

Op grond van de hierboven beschreven onderzoeksresultaten kan men ook niet de conclusie trekken dat een leerling net zo goed niets aan zijn 'gewone' huiswerk kan doen. In de proefgroepen zonder huiswerk zal immers de les, door het ontbreken van het vaak langdurige huiswerk bespreken, ànders zijn ingericht. Dat levert uiteraard een heel andere situatie op dan die van een enkele leerling,

die in de gewóne situatie zijn huiswerk niet maakt! Bovendien, dat er wat betreft de schoolprestaties geen significante verschillen zijn gevonden tussen de proefgroepen als geheel en de controlegroepen als geheel betekent niet, dat het voor individuele leerlingen in deze groepen dus ook geen verschil heeft uitgemaakt of zij wèl of géén huiswerk moesten maken. Bij sommigen kan het effect van huiswerk wel positief en bij anderen juist negatief geweest zijn, zó dat het effect in een groep leerlingen gemiddeld vrijwel nihil was.

Ons inziens moeten de gegevens uit deze onderzoeken wel aanleiding zijn om het nut van het 'gewone' huiswerk voor wiskunde als heel wat minder vanzelfsprekend te beschouwen dan veelal gebruikelijk is.

d Het effect van 'alternatieve' vormen van huiswerk voor wiskunde

Met name in Amerika is onderzocht òf en hoe het effect van huiswerk door veranderingen in de gebruikelijke huiswerkpraktijk, zoals een andere inhoud van de opgaven, meer begeleiding thuis, of andere feedback door de leraar, beïnvloed kan worden. In de afgelopen twintig jaar is een dertigtal van dergelijke onderzoeken speciaal op het vak wiskunde gericht geweest. De opzet van deze onderzoeken was gelijk aan die van de hierboven beschreven onderzoeken naar het verschil in effect tussen géén huiswerk en wèl 'gewoon' huiswerk. Er werd steeds gewerkt met een 'alternatieve' vorm van huiswerk voor wiskunde in proefgroepen en met 'gewoon' huiswerk in controlegroepen en na verloop van tijd werden de prestaties bij toetsen in de proefgroepen vergeleken met die in de controlegroepen. In enkele gevallen werden daarnaast ook verschillen in attitude tussen de leerlingen van de proefgroepen en de leerlingen van de controlegroepen onderzocht. Een probleem bij alle experimenten waarbij met een of meer variabelen in de huiswerkpraktijk gemanipuleerd wordt is, dat er erg veel factoren in de klassesituatie en in de situatie bij de leerlingen thuis zijn aan te wijzen, die het effect van huiswerk zouden kunnen beïnvloeden en die daarom onder controle gehouden zouden moeten worden. In hoeverre dat gelukt is bij de experimenten met andere vormen van huiswerk voor wiskunde is vaak niet erg duidelijk. Dit maakt dat de resultaten van deze experimenten met enige reserve bekeken moeten worden. Bij het bestuderen van de resultaten moet men zich overigens ook realiseren dat, evenals bij de experimenten met proefgroepen zònder huiswerk, vrijwel steeds gemiddelde toetsscores van de leerlingen in de proefgroepen vergeleken werden met de gemiddelde toetsscores van de leerlingen in de controlegroepen. Het is dus heel goed mogelijk (en soms bij verder onderzoek ook gebleken) dat een bepaalde verandering van de wiskunde-huiswerkpraktijk geen effect leek te hebben, terwijl deze voor sommige leerlingen wel degelijk van positieve invloed was en op anderen juist negatief uitwerkte. Tenslotte moeten we er nog op wijzen dat de experimenten met 'alternatieve' vormen van huiswerk voor wiskunde alle betrekking hebben op Amerikaanse schoolsituaties en dan nog op sterk uiteenlopende situaties: van lagere school tot universiteit. Een en ander maakt dat uit de resultaten van deze experimenten geen pasklaar recept af te leiden is voor de huiswerkpraktijk voor het vak

wiskunde in het Nederlandse voortgezet onderwijs. Toch lijkt ons kennisname van de resultaten interessant voor wiskundeleraren en -leraressen in Nederland, die op zoek zijn naar ideeën om het eigen handelen te aanzien van huiswerk te verbeteren.

We zullen nu de veranderingen in de huiswerkpraktijk bij wiskunde, waarmee men geëxperimenteerd heeft, opsommen en bij elke verandering de resultaten van de betreffende experimenten samenvatten.

Meer of minder schriftelijke feedback
Het is in sommige landen, waaronder Amerika, heel gebruikelijk dat de leraar alle huiswerk schriftelijk corrigeert. Om na te gaan of de enorme hoeveelheid tijd die leraren aan dit correctiewerk besteden wel iets oplevert, zijn er in de V.S. experimenten gedaan waarmee men wilde vaststellen of er verschil in effect is tussen het geheel resp. het gedeeltelijk door de leraar nakijken van schriftelijk gemaakt huiswerk voor wiskunde, tussen geheel resp. gedeeltelijk beoordelen van het huiswerk door middel van een cijfer, tussen wel resp. geen uitgebreid commentaar bij het huiswerk schrijven en tussen wel resp. geen persoonlijk tintje geven aan dit commentaar. Er is ook een experiment verricht waarbij in de ene groep leerlingen het huiswerk voor wiskunde alleen tijdens de volgende les besproken werd, terwijl van de andere groep leerlingen hetzelfde huiswerk zoals gebruikelijk schriftelijk gecorrigeerd werd, zonder dat er in de volgende les nog aandacht aan besteed werd. Noch voor wat betreft de schoolprestaties, noch voor wat betreft de attitude ten aanzien van het vak wiskunde werden significante verschillen tussen de proefgroepen en de controlegroepen bij deze experimenten gevonden. Het lijkt dan ook niet zinvol als een wiskundeleraar àlle huiswerk van zijn leerlingen zelf nakijkt en schriftelijk becommentarieert.

Meer feedback door ouders
Er is onderzoek gedaan naar verschillen in prestaties tussen leerlingen die bij het maken van huiswerk voor wiskunde géén feedback van hun ouders kregen, leerlingen die na èlke gemaakte huiswerksom van vader of moeder hoorden of de som goed gemaakt was, en leerlingen die na het maken van de hele serie huiswerkopgaven deze feedback van een der ouders kregen. De prestaties van de twee laatste groepen waren onderling niet significant verschillend, maar zij waren wèl significant beter dan de prestaties van de eerste groep. Het lijkt erop dat leerlingen beter presteren als hun ouders, in welke vorm dan ook, aandacht aan hun huiswerk besteden. In een aantal Duitse artikelen is dit aangevoerd als argument voor de afschaffing van huiswerk: aangezien ouders uit sociaal 'hogere' milieus over het algemeen méér aandacht voor het huiswerk van hun kinderen hebben en deze kinderen daardoor beter presteren, zou huiswerk de ongelijkheid van kansen bevorderen!

Hulpmiddelen beschikbaar stellen
Er is een onderzoek uitgevoerd, waarbij verschillende groepen leerlingen de beschikking kregen over verschillende soorten hulpmiddelen bij het huiswerk voor wiskunde: boekjes met tips voor de aanpak van de opgaven, antwoorden-

boekjes, boekjes met volledig uitgewerkte oplossingen, of géén van deze hulpmiddelen. De prestaties van de groep met de tips en die van de groep met de antwoorden waren gemiddeld beter dan die van de andere groepen. Bij uitsplitsing naar de verschillende onderdelen van de meetkunde, waaraan de leerlingen gewerkt hadden, bleek echter dat de prestatieverschillen tussen de groepen sterk van die onderdelen afhingen. Bij een ander onderzoek bleek, dat het voor de prestaties van de leerlingen niet uitmaakte of antwoordenlijsten werden verstrekt op het moment waarop het huiswerk opgegeven werd, of pas tijdens de volgende les wanneer het huiswerk al gemaakt was.

Huiswerk op basis van vrijwilligheid
Bij experimenten met het laten vallen van de verplichting om huiswerk te maken werden geen significante verschillen in prestaties tussen proefgroepen en controlegroepen gevonden. Bij een van deze onderzoeken bleek echter dat er wèl belangrijke verschillen optraden als naar de individuele leerlingen gekeken werd: bij zo'n 25% van de leerlingen waren de prestaties na verplicht huiswerk voor wiskunde significant beter dan na vrijwillig huiswerk.

Minder huiswerk
Bij een onderzoek naar de invloed van de hoeveelheid huiswerk voor wiskunde op de schoolprestaties bestond het huiswerk voor één groep leerlingen steeds uit vijf sommen, terwijl in een andere groep aan de leerlingen steeds ongeveer vijftien huiswerksommen opgegeven werden. Van de eerste groep werden altijd alle opgaven in de volgende les besproken, van de tweede groep eveneens diezelfde of soortgelijke vijf opgaven, in dezelfde tijd als bij de eerste groep, en hier bleef dus steeds een tiental huiswerksommen onbesproken. De prestaties van de groep met weinig huiswerk waren duidelijk beter dan die van de groep met veel huiswerk! Met extrapolatie van dit resultaat moet men natuurlijk voorzichtig zijn. Maar misschien mogen we wel concluderen dat het effect van huiswerk meer in de kwaliteit, ook van de bespreking ervan, zit dan in de kwantiteit.

'Supervised study'
Het verschil in effect tussen 'gewoon' huiswerk en 'supervised study' is nagegaan. Het ging hierbij om de volgende vorm van supervised study: gedurende een deel van de les werken de leerlingen individueel aan een serie, door de leraar opgegeven, wiskundesommen; de leraar loopt rond in de klas en geeft desgevraagd aanwijzingen of andere hulp. Er werden geen significante verschillen in prestaties tussen de proefgroepen en de controlegroepen vastgesteld. Wèl leken goede leerlingen meer van huiswerk en zwakke leerlingen meer van supervised study te leren.

Geïndividualiseerd huiswerk
Er is een onderzoek gedaan naar het effect van geïndividualiseerd huiswerk voor wiskunde, waarbij geprobeerd werd om elke leerling van een proefgroep speciaal bij zijn of haar mogelijkheden en interesse passend huiswerk op te geven. De leerlingen van de controlegroepen kregen allen dezelfde series gewone huiswerksommen. Als geheel presteerden de proefgroepen significant beter dan de

controlegroepen. Opmerkelijk is dat dit effect vooral optrad bij de betere leerlingen en bij de meisjes (de doorsnede van deze verzamelingen was uiteraard niet leeg!). Na afloop van het experiment met geïndividualiseerd huiswerk was de belangstelling voor wiskunde bij de jongens duidelijk groter in de proefgroepen en bij de meisjes juist groter in de controlegroepen met gewoon huiswerk.

Opgaven over eerder behandelde stof
Het meest gebruikelijk is, dat huiswerkopgaven betrekking hebben op de zojuist behandelde leerstof. Op die manier wordt dan sequentieel door de stof heen gewerkt. Men kan echter ook een gedeelte van de als huiswerk uitgekozen opgaven direct opgeven, en de rest láter. De leerlingen maken dan steeds huiswerk over zojuist behandelde stof èn over eerder behandelde leerstof. Als resultaat van de experimenten, waarbij de effecten van deze twee methoden van huiswerk opgeven vergeleken werden, vond men steeds dat de tweede methode betere prestaties opleverde, al waren de verschillen niet altijd significant. Wat betreft de attitude ten aanzien van wiskunde werden geen significante verschillen gevonden.

Voorbereidende opgaven
Men kan ook huiswerk opgeven, dat speciaal bedoeld is om de leerlingen voor te bereiden op de leerstof die in de volgende lessen behandeld zal worden. Zulk huiswerk kan bestaan uit opgaven, die de benodigde voorkennis opfrissen, maar ook uit opgaven, die de leerlingen laten kennis maken mèt en motiveren voor de nieuwe leerstof en die een intuïtieve basis leggen voor het oplossen van de nieuwe problemen. Deze opgaven zijn natuurlijk niet altijd in het boek te vinden, vaak zal men ze zelf moeten bedenken. Experimenten mèt proefgroepen, die voor wiskunde huiswerk kregen dat gedeeltelijk uit voorbereidende en gedeeltelijk uit 'gewone' huiswerkopgaven bestond, en proefgroepen, die alleen 'gewoon' huiswerk (over de pas behandelde stof) kregen, leverden op dat de prestaties van de proefgroepen altijd beter, en meestal ook significant beter, waren.

Opgaven over de stof van langere periodes
De laatste tijd richt het onderzoek zich vooral op huiswerk voor wiskunde dat bestaat uit opgaven over vroeger behandelde stof, opgaven over zojuist behandelde stof èn opgaven die voorbereiden op nieuwe stof. Bij proefgroepen met dit soort huiswerk werden in de meeste gevallen betere prestaties geconstateerd dan bij controlegroepen met 'gewoon' huiswerk, al waren de verschillen niet altijd significant. Ten aanzien van de attitude werden geen, of geen significante, verschillen gevonden.
In het begin van dit artikel staat een uitspraak van een leerlinge, die kennelijk nogal eens tevergeefs met haar huiswerk heeft zitten worstelen en daaraan het gevoel heeft overgehouden dat op die manier bezig zijn niet zo zinvol is. Naar onze indruk geven onderzoeksresultaten haar gelijk. Dat wil niet zeggen – en ook daartoe geven onderzoeken aanleiding – dat er niet op een zinniger manier met huiswerk omgegaan kan worden. Eén ding staat voor ons vast: het werk in de klas, het contact tussen leraar en leerling, is primair en huiswerk kan nooit de vervanging daarvan, maar hooguit een aanvulling daarop zijn.

Een selectie uit de literatuur:

C. Veenstra: Huiswerk in het voortgezet onderwijs: een onderzoek. *Info*, jaargang 12 nr 5, Groningen 1981.

Dit artikel bevat een verslag van een recent empirisch onderzoek naar de huiswerkpraktijk en de opvattingen van leraren, leerlingen en ouders op een aantal scholen voor voortgezet onderwijs te Groningen. Met literatuuropgave.

D. von Derschau: Die Problematik der Hausaufgaben. Ein Ueberblick. *Zeitschrift für Paedagogik*, jg 23 nr 2, 1977.

Uitvoerig overzichtsartikel over onderzoeksresultaten en stand van de discussie over het huiswerkprobleem in West Duitsland. Met literatuuropgave.

B. Wittmann: *Vom Sinn und Unsinn der Hausaufgaben*. 2e dr, Leuchterhand, Neuwied 1970.

Dit boek geeft een verslag van een uitvoerig experiment waarmee het effect van de 'gebruikelijke' huiswerkpraktijk onderzocht werd. Het bevat ook een overzicht van de discussie in (West) Duitsland tot ongeveer 1960. Met uitvoerige, maar wat verouderde, literatuuropgave.

G. Eigler und V. Krumm: *Zur Problematik der Hausaufgaben*. 2e dr, Beltz, Weinheim 1979.

In dit boek wordt een goed overzicht gegeven van de stand van zaken rond de huiswerkproblematiek. In de 2e druk is een uitvoerige bibliografie opgenomen, waarin ook veel recente Amerikaanse literatuur te vinden is.

J. D. Austin: Homework Research in Mathematics. *School Science and Mathematics*, vol 79 nr 2, 1979.

In dit artikel wordt een overzicht geboden over Amerikaans experimenteel onderzoek naar de effectiviteit van allerlei vormen van huiswerk. Met literatuuropgave.

Geïnteresseerden kunnen een uitvoeriger literatuurlijst aanvragen bij de auteurs, p/a Onderafdeling der Wiskunde en Informatica van T.H. Delft, Julianalaan 132, 2628 BL Delft.

Avond-kolleges sterrekunde voor gevorderden

In de reeks avond-kolleges sterrekunde voor gevorderden die door het Sterrekundig Instituut te Utrecht jaarlijks wordt georganiseerd zal dit jaar behandeld worden:
Eigenschappen en evolutie van de zwaarste sterren
De kolleges worden steeds op een donderdagavond gegeven:
24 februari: Prof. Dr. P. S. The – 'Hete reuzensterren'
3 maart : Prof. Dr. C. de Jager – 'Hyperreuzen en rode superreuzen'
10 maart : Dr. K. A. van der Hucht – 'De Wolf-Rayetsterren'
17 maart : Prof. Dr. H. J. G. L. M. Lamers – 'De bouw en levensloop van zware sterren'

De kolleges vinden plaats in de Sterrewacht te Utrecht (van het station te bereiken met stadsbuslijn 2, richting Kanaleneiland, halte Agnietenstraat). Ze duren van 19.30 tot 21.15 uur. Er zijn geen kosten aan verbonden, maar men wordt wel verzocht zich van te voren aan te melden bij de administratie van de Sterrewacht, Zonnenburg 2, 3512 NL Utrecht, tel. 030-31 28 41.

De computer in het wiskunde-onderwijs: een verkenning naar niet-CAI/CMI toepassingen

G. J. T. A. BAKX

Waarom kijken naar niet-CAI/CMI toepassingen

De vraag of, en op welke manier, de microcomputer ingeschakeld kan worden in het wiskunde-onderwijs dringt zich steeds meer op, nu vele scholen overgaan tot aanschaf van dergelijke apparaten. Weliswaar zijn waarschijnlijk de eerste motieven voor deze aanschaf inschakeling bij administratieve werkzaamheden en inschakeling bij lessen 'computerkunde'. Het lijkt toch de moeite waard ook eens goed na te denken over hoe wiskunde-onderwijs ondersteund kan worden met de aangeschafte of aan te schaffen apparatuur.

De meest vertoonde en meest besproken toepassingen van de (micro)computer in het (wiskunde)onderwijs zijn Computer Assisted Instruction (CAI) en Computer Managed Instruction (CMI). Hierbij is sprake van een sterk geïndividualiseerde vorm van onderwijs. Zoals de titel van dit artikel al suggereert, wil ik het hier niet hebben over dié toepassingsvormen van de computer. Ik verwacht namelijk dat het met die vormen de komende jaren zo'n vaart niet zal lopen. Ik heb daardoor twee redenen. De eerste is het feit dat voor dergelijk geïndividualiseerd onderwijs grotere systemen met veel 'eindstations' (terminals of microcomputers) nodig zijn om meerdere leerlingen tegelijk te kunnen bedienen. Ik ga er daarbij van uit dat het systeem voor meerdere vakken en door meerdere leerlingen tegelijk gebruikt moet kunnen worden. De tweede reden is, dat erg veel tijd en geld gestoken zal moeten worden in het ontwikkelen van de benodigde programmatuur (de zogenaamde 'courseware'). Men kan, wat dit punt betreft, de meest wilde schattingen horen en lezen van de benodigde voorbereidingstijd voor 1 uur CAI-kursus. Deze is overigens sterk afhankelijk van het type CAI waarover het gaat en zal het kleinst zijn bij een 'drill-and-practice' opzet. Op korte termijn acht ik daarom de enige CAI-toepassing die kans van slagen heeft de 'drill-and-practice' opzet. Daarbij wordt dan geen nieuwe leerstof geïntroduceerd, maar wordt reeds geleerde leerstof verder ingeoefend. Deze mogelijkheid kan dan in remediale opzet worden aangeboden aan bepaalde leerlingen.

Verder met niet-CAI/CMI toepassingen. Ik kom dan uit bij Computer Supported Instruction (CSI). (Voor een volledig overzicht van toepassingen: zie van Hees [1].) Hierbij stel ik me dan nu de meer conventionele, minder geïndividualiseerde vormen van onderwijs voor, waarbij de computer een ondersteunende rol

speelt. In de wiskundeles bijvoorbeeld zou de microcomputer kunnen fungeren als 'proefopstelling', zoals de natuurkunde-leraar en de scheikunde-leraar die kent ter ondersteuning van zijn onderwijs. Deze collega's hechten veel waarde aan de 'demonstratie-proef' en de 'leerling-proef'. In de wiskundeles heeft de microcomputer dan een plaats in de klas naast het schoolboek en ander schriftelijk materiaal en naast het schoolbord en/of de overhead-projector. Er zijn drie aspekten te noemen die de levensvatbaarheid van dit type toepassing van de computer gunstig beïnvloeden. Het eerste is, dat in de huidige praktijk van onderwijsgeven in mindere mate wordt ingegrepen. Het tweede is, dat het ontwerpen van de hiervoor benodigde programmatuur minder tijdrovend (en dus kostbaar) is. Dit laatste vooral, omdat de instruktieve dialoog met de leerling(en) niet geprogrammeerd hoeft te worden. Deze dialoog wordt immers gevoerd door bijvoorbeeld de leraar (onderwijsleergesprek). Het derde aspekt is, dat per groep leerlingen een veel kleiner aantal 'stations' nodig is, aangezien het aksent hier niet ligt op de individualisering.

Deze gedachtengang mondt nu uit in de vraag, voor welke onderwerpen en voor welke didaktische momenten de microcomputer in CSI-opzet een geschikt hulpmiddel is om de wiskundeles te ondersteunen.

Op zoek naar beschrijvingen

Een zinvolle eerste stap op weg naar beantwoording van bovengenoemde vraag is, te kijken naar wat er zoal geprobeerd en bedacht is met betrekking tot deze opzet. Daartoe is een literatuur-studie verricht. (Bakx [2].) Naar aanleiding van deze studie wil ik proberen een aantal gevonden toepassingen in de rest van dit artikel kort aan te geven. Daarbij wordt gekeken naar die toepassingen, waarin in de klas een (of meerdere) 'voorgeprogrammeerde' computer(s) staat (staan) opgesteld. De computer staat daarbij ten dienste van leraar en leerling, doordat hij bepaalde taken geautomatiseerd kan verrichten. Er hoeven nog maar enkele initiële gegevens te worden ingevoerd om de gewenste taak te volbrengen. Dit invoeren van de gegevens kan, in klassikale opzet, door de leraar gebeuren of, wanneer groepjes leerlingen gevormd zijn, door leerlingen.
In de literatuur kan men voor een aantal onderwerpen uit de schoolwiskunde deze opstelling en wijze van hanteren van de computer terugvinden.

Zo vindt men bij het onderwerp kansrekening en statistiek een computer die, nadat bepaalde parameters zijn ingevoerd, stochastische experimenten simuleert, de resultaten daarvan registreert en grafisch op het beeldscherm presenteert. De computer is een hulpmiddel bij uitstek voor een dergelijke toepassing omdat, door zijn snelheid van numeriek handelen, in een kort tijdsbestek een groot aantal stochastische experimenten (gesimuleerd) herhaald kunnen worden en daaruit een aantal gegevens verzameld kunnen worden. Dit heeft didaktisch gezien het voordeel dat bepaalde experimenten in veelvoud in de les beschouwd kunnen worden en de leerlingen bijvoorbeeld een goede ondersteuning wordt geboden voor inzicht in het aspekt van het begrip 'kans' dat het iets zegt over wat

'op de lange duur' (na veel herhalingen) de resultaten van bepaalde gebeurtenissen zullen zijn. Leerlingen hebben namelijk al een bepaald idee van de begrippen 'waarschijnlijkheid' en 'kans' als ze geconfronteerd worden met het onderwerp kansrekening en statistiek, maar dat zal vaak niet helemaal overeenkomen met de wijze van definiëren in de wiskundeles. Een didaktische aanbeveling die men wel kan lezen bij beschrijvingen van deze opzet is, om vooraf aan de computersimulaties van stochastische experimenten de leerlingen simulaties met meer materiële objekten als dobbelstenen, tolletjes, e.d. te laten ervaren. Dit om een juiste idee-vorming te realiseren van het simuleren-op-zich, voordat gebruik gemaakt wordt van de computer-simulatie.

Bij een ander onderwerp uit de schoolwiskunde, algebra en analyse, is een veel gehanteerde opzet voor gebruik van de computer die, waarin deze de grafiek van (een gedeelte van) een functie op het beeldscherm presenteert. Nadat bijvoorbeeld het functievoorschrift en de te aanschouwen gedeelten van x-as en y-as zijn ingevoerd, berekent de computer voor verschillende x-waarden de bijbehorende y-waarden en presenteert (veelal in luttele seconden) conform een grafiek op het scherm. Het didaktisch voordeel hiervan kan zijn dat in de les op interaktieve wijze een verscheidenheid aan (nette) grafieken beschouwd kunnen worden ten behoeve van verheldering van bijvoorbeeld wiskundige begrippen die betrekking hebben op de vorm van de grafiek van een functie (domein, bereik, extreem, trend, continuïteit, etc.). De computer maakt het mogelijk meerdere grafische voorbeelden en niet-voorbeelden, zonder reken- en teken-werk door leraar en/of leerling, interaktief te genereren. Zo kunnen bijvoorbeeld vermoedens met betrekking tot de vorm van de grafiek meteen getoetst worden. De noodzaak tot 'nette getallen' ontbreekt, zodat ook toepassingen buiten de wiskunde erbij betrokken kunnen worden. (zie o.a. Camp [3]).

Andere onderwerpen uit de analyse en algebra, waarbij in de beschrijvingen in de literatuur gebruik gemaakt wordt van het numerieke vermogen, gecombineerd met het grafische vermogen van de computer zijn limiet, afgeleide, integraal, e.d. Bij met name het onderwerp bepaalde integraal heeft men duidelijk positieve effecten bij leerlingen geconstateerd, door de computer onder- en bovensom bij bepaalde stapgrootte te laten berekenen en dit te combineren met de bekende grafische representatie van onder- en bovensom. (zie o.a. O'Loughlin [4]).

Het numerieke vermogen van de computer kan soms ook uitgebuit worden bij het leveren van een bewijs of het zoeken daarvan. Een groot aantal gevallen kunnen al-dan-niet uitputtend op bepaalde numerieke eigenschappen getoetst worden, om met behulp van deze resultaten (al-dan-niet grafisch samengevat) het bewijs te leveren of aan te vullen of om, ten behoeve van het vinden van het bewijs, daaruit inspiratie op te doen. Voor dit type toepassing is in de literatuur echter bijna niets te vinden en voor dat wat er is geldt, dat het of boven het niveau van de schoolwiskunde ligt, of betrekking heeft op voor de schoolwiskunde irrelevante probleemstellingen. Ten behoeve van de verkenning echter noem ik het toch. Het biedt immers de mogelijkheid om leerlingen te confronteren met het essentiële verschil tussen inductief redeneren en deductief redeneren.

De volgende te noemen manier van ondersteunen door de computer, ook te vinden in de literatuur, vraagt kennis van de leerlingen van een computertaal (in de beschrijvingen waren dat APL en LOGO). In dit kader wordt een (kort) computerprogramma aan de leerlingen gepresenteerd dat moet dienen als een 'glass-box' voor verheldering van wiskundige begrippen en regels. Het programma 'moet spreken tot de lezer', niet alleen door zijn werking (dan is het een 'black box'), maar vooral ook door zijn structuur. Het programma moet kort, helder en goed leesbaar zijn, om verhelderend te kunnen zijn. Een heel eenvoudig voorbeeld hiervan is een programma dat de absolute waarde van een getal oplevert en dit begrip duidelijk overbrengt naar de leerlingen doordat zij de tekst van het programma kunnen lezen en de resultaten van verwerkingen van het programma kunnen zien (een 'glass-box' dus). Op deze wijze zouden vele onderwerpen uit de logica, verzamelingenleer, algebra, getaltheorie en analyse overgedragen kunnen worden. (zie Peelle [5]). Men kan verder gaan dan het presenteren van dergelijke programma's en de leerlingen vragen zelf 'glass-box'-programma's te ontwerpen als onderdeel van bijvoorbeeld de verwerkingsfase van het leren van bepaalde wiskunde.

Een laatste voorbeeld van toepassen is het aanbieden met behulp van de computer van simulaties en spelletjes. Wanneer voor het omgaan daarmee relevante wiskundige vaardigheden nodig zijn kan deze opzet functioneren als motivatie voor de wiskunde en als oefenmateriaal voor wiskunde. Het is een manier van toevoegen van een context aan de wiskundeles. Een opzet die simulaties, ver doorgevoerd, integreert in de wiskundeles wordt in de literatuur behandeld o.a. onder de naam SOLO. De 'geestesvader' van deze opzet is Papert ([6]). Hij hangt de stelling aan dat het leren van wiskunde fundamenteel dient in te houden het door leerlingen zelf mathematiseren en zelf wiskundig analyseren. Hij komt dan tot het standpunt dat een project-georienteerde benadering van onderwijs geboden is. Dit is te realiseren door o.a. een computer in een practicum-opstelling, waarin de leerlingen wiskundige problemen kunnen herkennen en oplossen. De fundamentele wiskundige vaardigheden en begrippen kunnen in genoemde opstelling door de leerlingen concreet worden geïnterpreteerd. Het woord 'fundamenteel' heeft bij Papert nog een extra inhoud, omdat hij tevens stelt dat bijvoorbeeld de conventionele algebra niet zo erg geschikt is om leerlingen fundamentele wiskundige activiteiten te laten ontplooien. Hij pleit voor het 'doen' van wiskunde in plaats van 'erover te leren'. Daartoe moeten nieuwe, pedagogische takken van wiskunde ontworpen worden. Een exponent van deze gedachtengang is de TURTLE-meetkunde. De practicumopstelling hierbij is een robot die al-dan-niet strepen op de ondergrond kan achterlaten en door de computer bestuurd kan worden door middel van de taal LOGO. De robot kan voorwaarts of achterwaarts worden bewogen, terwijl de richting waarin dat gebeurt ook te regelen valt. Hierdoor kunnen allerlei (leuke, meetkundige) figuren getekend worden. Vaak wordt de robot geabstraheerd tot een punt op het beeldscherm van de computer, dat op dezelfde wijze bestuurd kan worden. Dit alles biedt dan de opstelling die leerlingen in de gelegenheid moet stellen tot belangrijke wiskundige activiteiten als mathematiseren en analyseren. Een erg interessante gedachtengang, nietwaar?

Slot

Dit 'plaatje' van allerlei CSI-toepassingen voor wiskunde m.b.v. de (micro)computer ondersteunt, dunkt me, de gedachte dat het de moeite waard is hieraan verder aandacht te besteden. De fundamentele vraag is dan, voor welke zaken, die een plaats hebben (of horen te hebben) in het wiskunde-onderwijs, kan de microcomputer een (betere?) ondersteuning bieden. Aan een dergelijke vraagstelling zullen we bij de lerarenopleiding wiskunde van de Technische Hogeschool Twente de komende tijd aandacht besteden.

Literatuur

[1] Hees van, F. J. W. M., *Computertoepassingen in het onderwijs: computerondersteuning in totaalbeeld*, Intermediair, 16, 27, 4 juli 1980.
[2] Bakx, G. J. T. A., *De (micro)computer als hulpmiddel in het wiskunde-onderwijs*, Memorandum 38, april '82, Onderafdeling der Toegepaste Wiskunde, Technische Hogeschool Twente.
[3] Camp, J. S., *Computer simulations and problem-solving in probability*, Creative Computing, v4, n5, p69-71, sep/oct. '78.
[4] O'Loughlin, Th., *Using electronic programmable calculators (minicomputers) in calculus instruction*, American Mathematical Monthly, '76, 83, p281-283.
[5] Peelle, H. A., *Computer glass boxes: teaching children concepts with 'a programming language' (APL)*, Educational Technology, 14, p9-16, apr. '74.
[6] Papert, S., *Teaching children to be mathematicians versus teaching about mathematics*, Int. J. Math. Sci. Technol., v3, p249-262, '72.

Korrel

(bij het artikel van Bakx)

In de inleiding van zijn artikel noemt Bakx redenen waarom CAI en CMI naar zijn mening niet zo gemakkelijk ingang zullen vinden bij het gewone onderwijs. Ik denk (en hoop van harte) dat hij gelijk heeft, maar ik denk ook dat hij een meer fundamentele reden niet noemt: Bij CAI en CMI is geen creatieve wisselwerking mogelijk tussen de leerling en een of meer anderen. Leren is een, voor een deel, sociale activiteit. Ook het leren van wiskunde. Geloof de mensen niet die zeggen dat wiskunde een vak is dat je alleen kunt doen (of moet doen). Let maar eens op hoe graag juist zulke mensen willen vertellen over wat ze gevonden hebben. De mens wil interactie en creativiteit en daardoor zal CAI en CMI op den duur mislukken.
Bij het gebruik van de computer als hulpinstrument (CSI) blijft sociale interactie met anderen mogelijk. Bij talen als LOGO heeft de leerling de vrijheid te doen wat hem goed dunkt. De computer staat in zijn dienst en hij kan vrij en creatief handelen.

Joop van Dormolen

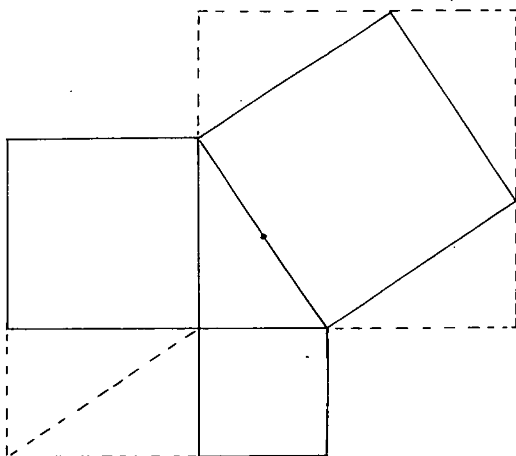
Naschrift

Twee opmerkingen in de korrel van Joop van Dormolen brengen mij tot dit naschrift. De eerste is zijn opmerking dat leren, voor een deel, een sociale aktiviteit is. Deze stelling onderschrijf ik (uiteraard) geheel en ik zal naast van Dormolen staan in de strijd tegen elke poging tot automatiseren van dat deel of automatisering ten koste van dat deel. De tweede opmerking is de konstatering dat de mens interaktie en kreativiteit wil en dat daardoor CAI en CMI op den duur zal mislukken. De woorden 'op den duur' kun je op meerdere manieren verstaan. Als daar echter de suggestie van uit moet gaan dat CAI en CMI bij voorbaat als bedreigend moet worden gezien voor genoemde interaktie en kreativiteit, dan vinden van Dormolen en ik elkaar niet. De eerstgenoemde stelling impliceert immers dat, naast een deel sociale aktiviteit, leren ook andere, meer individuele aspekten kent. Het bezien in hoeverre automatisering daar een bijdrage kan leveren, juich ik van harte toe.

Sir Bakx

Korrel

Een origineel bewijs van de stelling van Pythagoras



Ir. E. H. F. Weygers

Rekenen/wiskunde in de opleiding leraren basisonderwijs*

HANS FREUDENTHAL

Voor de ACLO Wiskunde, op het 'Concept Besluit Opleidingsscholen voor Leraren Basisonderwijs' uit opleiderskringen attent gemaakt, bestond alle aanleiding de consequenties te evalueren voor de leerplanontwikkeling Rekenen/Wiskunde voor basisschool en opleiding in het vergevorderd stadium waarin deze zich bevindt. Op de conclusie anticiperende mag gezegd worden dat de ACLO Wiskunde de ongerustheid van de opleiders 'Wiskunde en Didaktiek' deelt, om niet te spreken van vrees voor een dreigende ramp voor onderwijs en opleiding.

Uit het veelbelovende ICO rapport – daarin voorafgegaan door het Lochems overleg – moge een zinsnede worden geciteerd:

> De ICO gaat ervan uit dat binnen de geleding 'elementaire culturele vaardigheden' het zwaartepunt komt te liggen bij de vakken Nederlandse taal en rekenen/wiskunde. Voor laatstgenoemd vak dient relatief meer tijd te worden uitgetrokken dan momenteel in het Besluit Opleiding Onderwijzers wordt gedaan.

Hierbij vergeleken is het 'Concept Besluit..' een zware ontgoocheling: het minimaal aan rekenen/wiskunde te besteden lesuren zou volgens de bedoelingen van dit 'Concept Besluit..' zegge en schrijve 160 lesuren bedragen, d.w.z. ongeveer 3% van het totaal. Al is dit een minimum, het geeft dan toch een indicatie omtrent het gewicht dat in het 'Concept Besluit..' aan Rekenen/Wiskunde wordt toegekend. Men zal niet mistasten als men stelt dat dit gewicht sinds het ICO rapport tot een derde of zelfs minder is gereduceerd.

Het zij toegegeven dat er sinds het ICO rapport het één en ander is gebeurd. Er kwam een eindtermencommissie die volgens aanwijzingen van de toenmalige bewindsman een rapport heeft uitgebracht. Met tegenzin – mag men zeggen: de commissie constateerde en betreurde in haar rapport dat het opvolgen van de aanwijzingen tot een overladen programma had geleid (blz. 24-25): nadrukkelijk werd betoogd dat dit 'geen haalbare kaart' was (blz. 167). Ondertussen heeft de pgLOBO met haar modelonderwijsleerplan er nog enige schepjes boven opgelegd. Men kan zich moeilijk aan de indruk onttrekken dat die overlading thans op 'Wiskunde en Didaktiek' is verhaald – een geweldige aderlating. Om een groot aantal redenen valt dit te betreuren.

*) Dit advies is door de ACLO-wiskunde i.o. aan de minister van O & W gestuurd.

1 Voorzover bekend is Nederland *uniek* in Europa als het land waar men tot een algemene onderwijsopleiding wordt toegelaten zonder wiskunde in het examenpakket. De wiskunde kennis en bekwaamheid van de aankomende P.A. student is dan ook uitermate pover. Op zichzelf hoeft dit geen bezwaar te zijn: De opleider 'Wiskunde en Didaktiek' kan zodoende zelf de wiskundige attitudes van zijn studenten in goede banen leiden. Wel te verstaan: als hij ertoe in staat wordt gesteld. Dit echter wordt door de urentabel van het 'Concept Besluit..' praktisch uitgesloten.

2 Aan de andere kant is men in geen ander land en geen ander vak (buiten Nederland en Rekenen/Wiskunde) zo ver gevorderd in de integratie van vakonderwijs en zijn didaktiek, dankzij een al jaren durende nauwe samenwerking tussen opleiders en ontwikkelaars. Dit soort integratie is de meest efficiënte waarborg tegen de alom dreigende overlading: al hetgeen de student leert is direct – zij het op het niveau van het kind – toepasselijk in het onderwijs dat van zijn kant wordt verwacht.

3 Geen vak is zover gevorderd in het ontwikkelen van een PABO-didaktiek, d.w.z. in de bewustheid van de opleider bij het aanbrengen van didaktische en vakbekwaamheden.

4 In de bijlagen tot het rapport van de Eindtermencommissie staat dan ook 'Wiskunde en Didaktiek' model voor opleidingsonderwijs.

5 Om deze (maar ook om andere) redenen vervult 'Wiskunde en Didaktiek' in de opleiding de functie van een speerpunt die thans afgestompt, zo niet afgebroken dreigt te worden.

6 Het basisonderwijs wordt bedreigd door de trend van een kunstmatige vervroeging van een verkeerd begrepen cognitieve ontwikkeling en door een onjuiste toepassing van rekendoosjes en computers. Er worden methoden gepropageerd en op de markt gebracht, die een zogenaamd geïndividualiseerd of geautomatiseerd onderwijs beloven, waarbij de onderwijzende geen eigen initiatieven behoeft te ontplooien. Bij gebrek aan vakkunde en weerbaarheid is de onderwijzende allicht geneigd hierop te vertrouwen – de rekenles is aan het verdwijnen.
Het is bekend dat juist ten onzent ontwikkelaars en opleiders er daadkrachtig tegen in verzet zijn gekomen – hoopgevende ontwikkelingen die stopgezet of teruggedraaid moeten worden als het urentabel van het 'Concept Besluit..' verwezenlijkt wordt. Immers, hoe zal de a.s. leraar de vakbekwaamheid en de weerbaarheid verwerven om niet toe te geven aan wat hem van buiten wordt opgedrongen?

7 Er is een streven de zorgbreedte in het basisonderwijs te vergroten. Eerste vereiste hiervoor is vergroting van vakkennis en didaktische en diagnostische bekwaamheid van de leraar, waarvoor 'Wiskunde en Didaktiek' zich bijzonder goed leent. De trend, die door het 'Concept Besluit..' versneld zal worden, is de

tegengestelde: een steeds groeiend percentage leerlingen wordt ontmoedigd de doelstellingen van het basisonderwijs te halen; de spreiding heeft bij het startpunt van het voortgezet onderwijs een dusdanige omvang bereikt, dat succes belovend onderwijs in heterogene groepen op dit startpunt onmogelijk wordt gemaakt.

8 Het hoge peil van deskundigheid en de grote mate van motivatie die dankzij jarenlange intensieve samenwerking bij de opleiders 'Wiskunde en Didaktiek' is te constateren, rechtvaardigen het vertrouwen dat deze groep bijzonder efficiënt zou kunnen bijdragen tot een verbetering van de opleiding en tot het keren van de kwalijke tendenties van het ogenblik. Het zou zonde zijn als deze bijzonder goed toegeruste groep de kans zou worden ontnomen te laten zien wat ze kunnen.

Namens de ACLO Wiskunde moge ik derhalve een beroep op u doen om 'Wiskunde en Didaktiek' de nodige armslag te geven om onderwijs en opleiding van de bekwaamheid en de gemotiveerdheid van de opleiders in dit onderdeel ten volle te laten profiteren.

Gebruikte afkortingen:
ACLO :Adviescommissie Leerplanontwikkeling
ICO :Innovatie Commissie Opleidingen
pgLOBO :projectgroep Leerplanontwikkeling opleidingen basisonderwijs.
PABO :Pedagogische academie basisonderwijs.

Proficiat!

Op 8 december 1982 is Joop van Dormolen gepromoveerd tot doctor in de wiskunde en natuurwetenschappen op het wiskundig-didaktische proefschrift 'Aandachtspunten'.
Het is hier niet de plaats op de inhoud van dit proefschrift in te gaan, noch op de heel bijzondere plaats die Joop inneemt in het nederlandse wiskundeonderwijs. Wel is het hier de plaats Joop geluk te wensen met deze promotie en met het feit dat hij daardoor de nederlandse literatuur over wiskunde-didaktiek verrijkt heeft met een nieuwe, belangrijke bijdrage.
De redaktie maakt van de gelegenheid gebruik de hoop uit te spreken dat dit boek niet de laatste bijdrage van Joop op dit terrein zal zijn.
Joop, van harte proficiat!

De redaktie

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

475. Iemand heeft een vierkant grasveld met zijden van 6 meter. Hij heeft gras gezaaid en wil het zaad beschermen tegen de vogels. Hij spant daartoe draden van 1 meter lengte. Geen twee draden mogen elkaar snijden, d.w.z. een punt gemeen hebben dat inwendig punt is van beide draden. Hij spant de draden zo, dat geen nieuwe draad meer kan worden toegevoegd. Hoe kan hij dit doen?
Behandel het analoge probleem voor een willekeurige rechthoek.

476. Op tafel liggen *n* munten in een kring. Elke munt raakt zijn beide buren. *A* en *B* mogen om beurten naar believen één of twee elkaar rakende munten wegnemen. Wie de laatste munt wegneemt, wint. *A* begint en wint. Wat weet je van *n* en van *B*? (Naar een opgave in Wiskobas.)

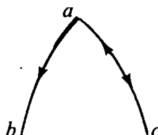
Onlangs kreeg ik een boek met de veelbelovende titel: What is the name of this book? Auteur Raymond Smullyan, uitgever Prentice Hall. Om de lezer een indruk van de inhoud te geven, neem ik er een verhaaltje en een opgave uit over.

477. Op 1 april zegt een jongen tegen zijn kleine broertje: Vandaag zal ik je voor de gek houden, zoals ik nog nooit gedaan heb. 's Avonds ligt het kleine jong in bed en kan niet slapen. Zijn moeder vraagt wat er is. 'Mijn broer heeft me gezegd, dat hij me vandaag voor de gek zou houden, zoals hij nog nooit gedaan heeft, en er is niets gebeurd.'
Broer wordt erbij gehaald.
Moeder: 'Heb jij je broertje gezegd, dat je hem vandaag voor de gek zou houden, zoals je nog nooit gedaan hebt?'
'Ja.'
Moeder: 'En heb je dat gedaan?'
'Neen. Dan klopt het toch!'
Gevraagd: wat is het resultaat van uw denkarbeid t.a.v. dit verhaal?

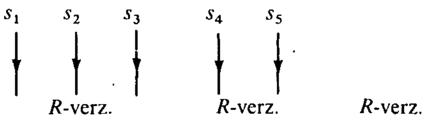
478. Op een eiland wonen drie soorten vrouwen: jonkvrouwen, slavinnen en normale vrouwen. De jonkvrouwen spreken altijd de waarheid, de slavinnen liegen altijd en de normalen spreken soms de waarheid en liegen soms. Helaas zijn de normalen weerwolven, d.w.z. ze kunnen zichzelf 's nachts in een wolvin veranderen. Iemand komt op het eiland en mag zich een bruid uitzoeken uit drie zusters. Bekend is dat één van de zusters een jonkvrouw, één een slavin en één een normale is. Hij wil met de jonkvrouw of met de slavin trouwen, maar niet met de normale dame, omdat hij doodsbenauwd is voor weerwolven. Hij mag aan één van de drie zusters één vraag stellen. Deze moet door haar beantwoord worden; het antwoord kan alleen maar 'ja' of 'nee' zijn. Na dit antwoord moet hij in staat zijn een bruid te kiezen die geen potentiële wolf is.
Welke vraag kan hij stellen?

Oplossingen

472. In V geldt een relatie R die rechts vergelijkbaar is, d.w.z. $xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz$.
Welke structuren kan R in V teweegbrengen?
Onderstel aRb, aRc en cRa.



$a R b \wedge a R c \Rightarrow c R b$
$c R b \wedge c R a \Rightarrow b R a$
Vanuit een element vertrekken dus alleen maar enkele pijlen of alleen maar dubbele pijlen.
De verzameling elementen van waaruit alleen maar enkele pijlen vertrekken, noemen we S. Onderstel $s \in S$.
$s R a \wedge s R a \Rightarrow a R a$
$s R a \wedge s R b \Rightarrow a R b \wedge b R a$
We definiëren
$A(s) \overset{\text{def}}{=} \{x | s R x\}$
Elk geordend paar elementen van $A(s)$ is nu door R verbonden. We noemen $A(s)$ dan R-verzadigd. Onderstel $a \in A(s), p \notin A(s)$ en aRp. We zien dan op dezelfde manier dat $A(s) \cup \{p\}$ R-verzadigd is. Dit proces kan men voortzetten. Noem de verzameling van alle elementen die door een R-keten verbonden zijn met elementen van $A(s)$ (waarvan $A(s)$ deel is) $A^*(s)$. Dan is ook $A^*(s)$ R-verzadigd.
Onderstel $s_1 \in S$ en $s_2 \in S$. Onderstel verder
$a \in A^*(s_1)$ en $a \in A^*(s_2)$
Uit $p_1 \in A^*(s_1)$ en $p_2 \in A^*(s_2)$ leidt men dan af $p_1\ Rp_2$ en $p_2 Rp_1$, dus $p_1 \in A^*(s_2)$ en $p_2 \in A^*(s_1)$. Zodat $A^*(s_1) = A^*(s_2)$.
Hieruit volgt:
$s_1 \in S \wedge s_2 \in S \Rightarrow A^*(s_1) = A^*(s_2) \vee A^*(s_1) \cap A^*(s_2) = \phi$.
De relatie 'heeft dezelfde A^*', verdeelt de verzameling S dus in parten. Bij de elementen van elk part behoort dezelfde R-verzadigde verzameling.
Verder kunnen er R-verzadigde verzamelingen optreden die geen enekel element van S boven zich hebben.
Ten slotte kunnen er nog geïsoleerde elementen zijn van waaruit geen enkele pijl vertrekt.
Schematisch ziet het geheel er zo uit:



Welke associatie krijgt u daarbij? Ik kreeg de volgende. De pijl betekent: macht hebben over. Links hebben we een land met drie ongenaakbare machthebbers s_1, s_2 en s_3. Verder is er in R-verz. een machtshiërarchie. Maar de mensen zijn daar geen van allen ongenaakbaar en dus heeft via kritiek, pressiegroepen e.d. ieder toch ook weer macht over ieder ander. In sommige landen is niemand ongenaakbaar. De geïsoleerde stippen, mochten die er zijn, zijn kluizenaars.

473. V is de verzameling van de natuurlijke getallen. R is een kringloop, d.w.z.
$x R y \wedge y R z \Rightarrow z R x$
Verder is $0 R 1$, $1 R 2$, $2 R 3$, ...
Welke structuur brengt R in V teweeg?
Met behulp van R kun je
1 vooruit en weer 1 vooruit, dus 2 achteruit
2 achteruit en weer 2 achteruit, dus 4 vooruit
1 vooruit en 4 vooruit, dus 5 achteruit
2 achteruit en 5 achteruit, dus 7 vooruit
enz.
dus
$1 + 3k$ vooruit
$2 + 3k$ achteruit $(k \in \mathbb{N})$.
Combinatie van twee van deze mogelijkheden levert geen nieuwe meer.
Want bijv. kun je
$2 + 3k_1$ achteruit en $2 + 3k_2$ achteruit, dus $1 + (k_1 + k_2 + 1)3$ vooruit.
Voeg nu nog één nieuwe mogelijkheid toe, bijv. $44 R 29$.
$44 R 29 \wedge 29 R 45 \Rightarrow 45 R 44$
$45 R 44 \wedge 44 R 45 \Rightarrow 45 R 45 \wedge 44 R 44$
$45 R 45 \wedge 45 R 46 \Rightarrow 46 R 45$

$43 R 44 \wedge 44 R 44 \Rightarrow 44 R 43$
enz.
Men ziet nu gemakkelijk in, dat V R-verzadigd is.
Aardig is na te gaan wat er komt als men van een kring uitgaat, d.w.z. als $V = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ en $0 R 1, 1 R 2, \ldots, n-1 R 0$.

474. Alle gewichten van 1 tot en met n moeten gevormd kunnen worden door middel van een stel gewichten waarvan de som n is. Elk bedrag mag maar op één manier gevormd kunnen worden. Het minimale aantal gewichten dat hiertoe vereist is, is een functie van n. Vind het functievoorschrift.
Het stel gewichten bevat minstens 1 gewicht 1. Onderstel het aantal gewichten 1 is 4. Dan bevat het stel een gewicht 5 en verder, wegens de eenduidigheid, uitsluitend gewichten die 5 of een veelvoud van 5 zijn. Hieruit volgt, dat n dan gelijk is aan een 5-voud $-$ 1, dus $n + 1$ deelbaar door 5.
Kies $n = 10$. Dan is $n + 1$ priem en is de enige oplossing een stel van 10 gewichten 1.
Kies $n = 34$. Nu is 35 deelbaar door 5 en door 7. Begin met 4 gewichten 1. Voeg nog 6 gewichten 5 toe. Met deze 10 gewichten kan men eenduidig alle gewichten van 1 tot en met 35 samenstellen. Is het aantal minimaal? Omdat 5 en 7 priem zijn, kunnen we noch de 4 gewichten 1 noch de 6 gewichten 5 door geringere aantallen vervangen. Het minimale aantal blijkt dus 10 te zijn. (We hadden ook 6 gewichten 1 en 4 gewichten 7 kunnen nemen.)
Kies $n = 29$. Nu is $30 = 2 \cdot 15$. Kies 1 gewicht 1 en 14 gewichten 2. Verdere reductie is nu mogelijk. Want $15 = 3 \cdot 5$. Hadden we 14 gewichten 1, dan zouden we deze kunnen vervangen door 2 gewichten 1 en 4 gewichten 3. De 14 gewichten 2 kunnen we dus vervangen door 2 gewichten 2 en 4 gewichten 6. Verdere reductie lukt niet. Het minimale aantal is dus $1 + 2 + 4$. Omdat $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, is het minimale aantal dus $1 + 2 + 4$.
Nu algemeen. Onderstel dat $n + 1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, waarin $p_1, p_2, \ldots, p_k$ priem zijn. Dan is het minimale aantal $p_1 + p_2 + \ldots + p_k - k$.

Boekbesprekingen

Studies in probability theory, M. Rosenblatt (editor), MAA Studies in Mathematics Vol. 18, The Mathematical Association of America, 1978, prijs: US $ 18.00.

Voor het samenstellen van een overzichtswerk met betrekking tot de nieuwste ontwikkelingen op een uitgebreid vakgebied, moet aan een aantal moeilijk te vervullen voorwaarden voldaan worden. Daar is eerst de eis dat de keuze van de te bespreken onderzoekgebieden voldoende breed moet zijn om zoveel mogelijk het totale vakgebied te bestrijken. Dan heeft men het probleem van de keuze van de auteurs: enerzijds moeten zij expert zijn op het onderhavige onderzoekgebied (hetgeen vrijwel altijd zal impliceren dat zij zich intensief en actief met dat gebied bezighouden en erover publiceren), anderzijds moet bekend zijn dat zij de moeilijke kunst om ingewikkelde en geavanceerde theorieën aan een intelligent, wiskundig algemeen ontwikkeld, maar niet ter zake deskundig, publiek in vogelvlucht duidelijk te maken, verstaan; als dan een auteur bekend is die deze kwaliteiten in zich verenigt, rest de samensteller nog de moeilijke diplomatieke taak om deze wiskundige ertoe te brengen zo'n overzichtsartikel ook inderdaad te schrijven.
Gezien bovengeschetste intrinsieke moeilijkheden bij het samenstellen van een bundel als de onderhavige, zou deze recensie kunnen volstaan met de mededeling dat de samensteller voortreffelijk in zijn opzet is geslaagd en dat hij een informatieve, deskundige en leesbare bundel over de moderne aspecten van de waarschijnlijkheidsrekening het licht heeft doen zien. Niettemin kan bij een beoordeling als deze ook enige specifieke informatie over de inhoud zijn nut hebben. In het volgende zal dan ook een zeer summiere beschrijving van de inhoud gegeven worden.
Het eerste artikel:
'Sequential Statistical methods', door J. Kiefer, behandelt de sequente methoden in de statistiek, geïntroduceerd door Abraham Wald in 1940, mede in relatie tot de daarmee samenhangende probabilistische theorieën over stoptijden en martingalen.

In 'Dependence and asymptotic independence for random processes', van M. Rosenblatt, wordt naast een algemene introductie tot stochastische processen, inzicht gegeven in de toepassingen van begrippen als ergodiciteit en menging (i.e. in dit kader een vorm van asymptotische onafhankelijkheid) in het kader van stationaire processen.
Het dan volgende derde artikel:
'Extreme value theory under weak mixing conditions', door M. R. Leadbetter, bespreekt de uitbreiding van de klassieke extreme waardentheorie van onafhankelijke gelijkverdeelde rijen stochastische variabelen tot stationaire stochastische processen onder mengingsvoorwaarden.
Het artikel 'analysis of stochastic equations', door G. C. Papanicolaou, is het langste van de bundel, gedeeltelijk door de vrij uitvoerige, benodigde voorbereiding (stochastische processen en ergodentheorie), maar vooral ook door de veelzijdigheid van het onderwerp. Stochastische vergelijkingen zijn hier (voornamelijk) differentiaalvergelijkingen met stochastische coëfficiënten.
De bijdrage van M. Kac, 'Some mathematical problems in statistical mechanics', gaat voornamelijk over de problemen die optreden bij de beschrijving van fase-overgangen in de statistische thermodynamica.
Tenslotte behandelt D. S. Ornstein in 'A survey of some recent results in ergodic theory, de nieuwe resultaten, o.a. de ontwikkelingen ten aanzien van het isomorfisme probleem, in de ergodentheorie.
Zoals boven al aangeduid: een zeer leesbaar (niet te verwarren met makkelijk) boek, dat van harte kan worden aanbevolen aan ieder die enig inzicht wil verwerven in het nieuwere werk op het terrein van de kansrekening.

C. L. Scheffer

G. L. Lamb, Jr, *Elements of Soliton Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1980.

In de tweede helft van de jaren zestig hebben solitonen hun intrede in de mathematische fysica gedaan en de aandacht opgeëist van een grote groep onderzoekers.
Laten wij vooropstellen dat 'solitonen' niet de benaming is van een nieuw soort elementaire deeltjes, maar een mathematisch begrip. Solitonen kunnen optreden als oplossingen van nietlineaire evolutie vergelijkingen, d.w.z. niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen waarbij een van de variabelen de tijd is. Een beroemd voorbeeld is de Korteweg-de Vries vergelijking, die luidt

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

waarbij $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in [0, \infty)$. Deze vergelijking, reeds in 1894 opgesteld in verband met een probleem voor watergolven, is na lange jaren van antiquarisch bestaan met de ontdekking van de solitonen weer in het middelpunt van de belangstelling gekomen.
Solitonen kunnen worden gekarakteriseerd als komponenten van de oplossingen van evolutie vergelijkingen die met voortschrijdende tijd de onderlinge interactie, en interactie met andere komponenten, doorstaan met behoud van eigen identiteit. Het boek van Lamb is bedoeld als inleiding in de theorie van soliton, met speciale aandacht voor de verschillende analitische methoden die in samenhang met solitonen zijn ontdekt en ontwikkeld. Centraal staat daarbij de zogenaamde 'Inverse Scattering Transformation'.
Het boek richt zich tot een publiek met achtergrond en belangstelling in de mathematische fysica. Wiskundige diepgang wordt niet nagestreefd. De mathematische gedachtengang wordt telkens snel afgewikkeld om aan phenomenologisch interessante resultaten volle aandacht te schenken. Dit alles resulteert in een indrukwekkende hoeveelheid informatie, aangeboden in een heldere en prettig leesbare stijl. Een duidelijke aanwinst voor degenen die belangstelling hebben in de mathematische fysica en de toegepaste wiskunde.

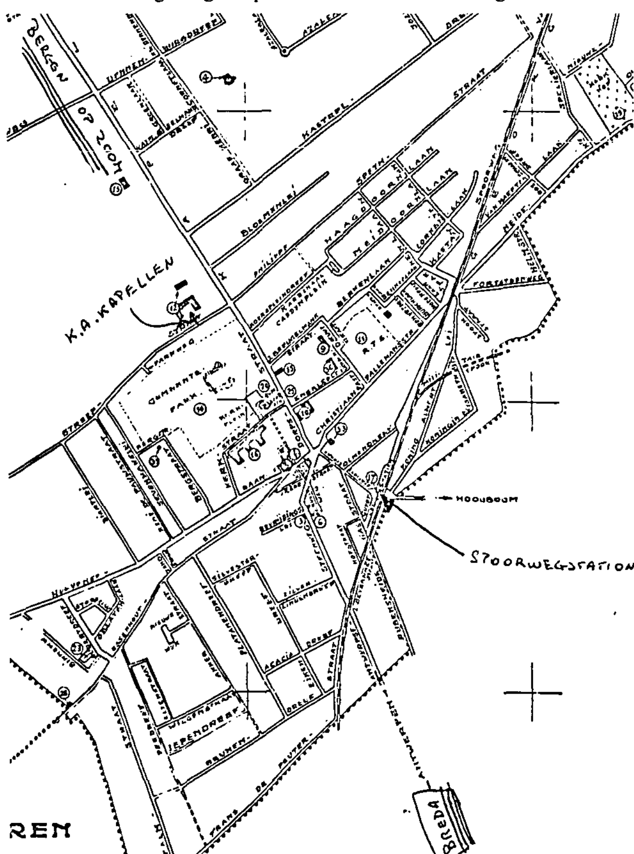
W. Eckhaus

Mededelingen

De achtste gemeenschappelijke studiedag van NVvW en VVWL

Op *zaterdag 26 maart 1983* houden de NVvW en de VVWL een gemeenschappelijke studiedag.
Plaats van samenkomst: Het Koninklijk Atheneum Kapellen, Streepstraat 2, Kapellen.
Agenda:
vanaf: 10.00 ontvangst
10.30 opening door de voorzitters Theo Korthagen en Frank Laforce
10.45 werkgroepen onder leiding van Joop van Dormolen over: Leren wat een bewijs is
12.30 warme lunch
14.15 spreekbeurt van Dr. R. van Looy over: Didactische aspecten van de aritmetica van Gauss
15.30 :rondvraag
16.00 sluiting

Wie aan de gemeenschappelijke lunch in het restaurant van het Koninklijk Atheneum wil deelnemen, wordt verzocht dit tijdig te melden door voor 5 maart a.s. *f* 15,– te storten op rekening 143917 ten name van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam, onder vermelding 'lunch 26 maart'.
Treinreizigers nemen de trein van 8.54 uit Roosendaal, aankomst Essen 9.02. Daar overstappen op de stoptrein naar Antwerpen. Vertrek Essen 9.30, aankomst Kapellen 9.48.
Op onderstaand kaartje ziet u hoe u het Atheneum bereikt te voet vanaf het station of met de auto vanuit de richting Bergen op Zoom of vanaf de snelweg Breda-Antwerpen.



Mededelingen

Aanmelding examens Wiskunde m.o. 1983 afgenomen door de algemene commissie

De staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen brengt ter kennis van belanghebbenden, dat degene die zich in 1983 wenst te onderwerpen aan het examen Wiskunde m.o.A. of m.o.B., af te nemen door de *Algemene Commissie* dient zich vóór *1 mei 1983* aan te melden door storting van *f* 80,– op postrekening 172007 ten name van de voorzitter van de Algemene Examencommissie Wiskunde M.O. te 's-Gravenhage met vermelding van de *volledige naam* en *het adres* van de candidaat en met de aanduiding m.o.A. of m.o.B.. Na 1 mei 1983 ontvangen de aangemelde candidaten nadere instructies van de examencommissie. Alle candidaten worden geëxamineerd volgens de nieuwe programma's zoals die zijn omschreven in het 'Nieuwe Tijdschrift voor Wiskunde', jrg. 63 afl. 2, nov. 1975, blz. 86-93. Men kan deze programma's verkrijgen door storting van *f* 2,– op bovengenoemde postrekening, met vermelding 'examenprogramma'. Het schriftelijk gedeelte, zowel van het A-examen als van het B-examen, wordt afgenomen op *donderdag 18* en *vrijdag 19 aug. 1983* in het congresgebouw te 's-Gravenhage.

Nederlandse Wiskunde Olympiade 1983

De eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1983 zal plaatsvinden op vrijdag 18 maart a.s.
Er kan aan deelgenomen worden door leerlingen van de vierde en de vijfde klas van het VWO en van de vierde klas van het HAVO. Leerlingen van lagere klassen kunnen wel deelnemen, maar de opgaven zijn niet afgestemd op hun niveau.
De organisatie is gelijk aan die van de voorgaande jaren: In februari ontvangen alle scholen voor VWO/HAVO een aantal exemplaren van het opgavenblad, een correctiesleutel en een resultatenformulier. De zending zal gericht zijn aan: DE WEDSTRIJDLEIDER VAN DE WISKUNDE OLYMPIADE.
Op scholen waar men de leerlingen gelegenheid wil geven aan de Olympiade mee te doen, moet dus een wedstrijdleider benoemd worden. Deze zorgt voor vermenigvuldiging van de opgaven, bepaalt de plaats waar op zijn school de eerste ronde gehouden zal worden, houdt daarbij toezicht en kijkt het gemaakte werk na. Voor het gemak en ook om een eenvormige beoordeling te bevorderen worden alleen uitkomsten gevraagd, geen beredeneringen en berekeningen.
De wedstrijdleiders noteren de resultaten op het resultatenformulier, dat zij naar het secretariaat van de Wiskunde Olympiade opsturen.
Het secretariaat zoekt uit de resultatenformulieren een honderdtal deelnemers met de hoogste score, vraagt van hen bij de wedstrijdleiders de bladen met uitwerkingen op en nodigt hen, na controle van de blaadjes, uit om deel te nemen aan de tweede ronde, die op vrijdag 16 september in Utrecht gehouden zal worden.
Uit de tweede ronde zullen tien prijswinnaars komen, terwijl voor enkele deelnemers de mogelijkheid bestaat mee te doen aan de Internationale Wiskunde Olympiade 1984.

H. N. Schuring, secreatris,
p/a CITO, Postbus 1034, 6801 MG Arnhem

Mededeling van het bestuur

In 1983 zullen de open vragen van het centraal schriftelijk examen wiskunde voor LBO-C en MAVO-C identiek zijn.
Het bestuur is voornemens de bijeenkomsten ter bespreking van het C-examen en van het D-examen te kombineren voor LBO en MAVO. De besprekingen zullen in ongeveer twintig plaatsen, verspreid over het gehele land, gehouden worden. De bijeenkomsten worden geleid door twee gespreksleiders, één voor het C-examen en één voor het D-examen. Ze zijn gepland op *woensdag 18 mei 1983* van 15.00 h tot 18.00 h (indien nodig tot 18.30 h).
Voor de pauze wordt het C-examen besproken, na de pauze het D-examen. Een uitgebreide aankondiging, ook voor HAVO en VWO, zal verschijnen in het mei-nummer (9) van Euclides.

INHOUD

ADRESSEN VAN AUTEURS

G. J. T. A. Bakx, Bolkskamp 21, 7576 GH Oldenzaal

J. van Dormolen, Kapteynlaan 105, 3571 XN Utrecht

H. Freudenthal, F. Schubertstraat 44, 3533 GW Utrecht

J. van Nunen, THE, Den Dolech 2, postbus 513, 5600 MB Eindhoven

H. J. Smid, Zeemanlaan 9, 2313 SV Leiden

Mw A. Verweij, Noord Rundersteeg 10, 2312 VN Leiden

J. Wessels, THE, Den Dolech 2, postbus 513, 5600 MB Eindhoven

Ir E. H. F. Weygers, Wilhelminalaan 42, 2625 KH Delft